34-Ma’ruza. n-o’lchovli vektorli Yevklid fazosi. n-o’lchovli Yevklid fazosi.

Ma’ruza mashg’ulotining rejasi:

1. n-o’lchovli vektorli Yevklid fazosi
2. n-o’lchovli Yevklid fazosi
3. n-o’lchovli Yevklid fazosida vektorlar ustida amallar
4. n-o’lchovli Yevklid fazosida nuqtadan gipertekislikkacha masofa

***O’quv mashg’ulotining maqsadi**:* n-o’lchovli vektorli Yevklid fazosi va n-o’lchovli Yevklid fazosi haqida to’liq tasavvurini shakllantirish.

Biz I_{1-4}, II_{1-4}, III_{1-2} aksiomalar yordamida n o’lchovli vektor fazo tushunchasini kiritgan edik hamda chiziqli amallarga asoslanib, shu fazo xossalarini o’rgangandik, lekin bu fazoda vektorning uzunligi, ikki vektor orasidagi burchak, ikki vektorning perpendikulyarligi kabi tushunchalar kiritilmagan edi. SHuning uchun I_{1-4}, II_{1-4}, III_{1-2} aksiomalar qatoriga yangi aksiomalar kiritish bilan yangi vektor fazolarni hosil qilamiz, shulardan biri vektorli yevklid fazosidir.

Ta’rif. V vektor fazoning ixtiyoriy ikki $\vec{a},\vec{b}$ vektori uchun ularning *skalyar ko’paytmasi* deb atalgan haqiqiy son mos keltirilgan bo’lib (ko’paytmani $\vec{a}\cdot\vec{b}$ bilan belgilaymiz), quyidagi to’rtta akskoma bajarilsa, bunday fazo *p o’lchovli vektorli yevklid fazosi* deb ataladi (uni V_E bilan belgilaymiz).

V_1 $\quad \forall\vec{a},\vec{b}\in V_n$ uchun $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$,

V_2 $\quad \forall\vec{a},\vec{b},\vec{c}\in V_n$ uchun $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$,

V_3 $\quad \forall\vec{a},\vec{b}\in V_n$ va $\forall k\in R$ uchun $k\vec{a}\cdot\vec{b}=k\cdot\left(\vec{a}\vec{b}\right)$.

V_4 $\quad \forall\vec{a}\neq 0\in V_n$ uchun $\vec{a}\cdot\vec{a}>0$

Bu aksiomalarni odatda vektorlarning *skalyar ko’paytirish aksiomalari* deb yuritiladi.

Avvalo yuqoridagi aksiomalardan kelib chiqadigan ba’zi natijalarni ko’raylik.

1-natija. V_2 aksiomadagi assotsiativlik qonuni ikki qo’shiluvchi vektor uchun o’rinli bo’lsa, u istalgan sondagi ko’shiluvchilar uchun ham o’rinlidir, ya’ni $\left(\vec{a}_1+\vec{a}_2+\ldots+\vec{a}_m\right)\vec{b}=\vec{a}_1\vec{b}+\vec{a}_2\vec{b}+\ldots+\vec{a}_m\vec{b}$ (ifodadagi barcha vektorlar V_E ga tegishli).

2-natija. $\vec{0}$ vektorni har qanday vektor bilan skalyar ko'paytmasi nolga tengdir, chunki V$_3$ ga asosan $\left(\vec{0}\cdot\vec{a}\right)=\left(\overrightarrow{0b}\cdot\vec{a}\right)=0\left(\vec{b}\cdot\vec{a}\right)=0$.

3-natija. $\vec{a}\cdot\vec{a}$ ckalyar ko'paytma faqat $\vec{a}=\vec{0}$ bo'lgandagina nolga tengdir, bu bevosita V$_4$ aksioma va 2-natijadan kelib chiqadi.

$\vec{a}\cdot\vec{a}>0\Rightarrow\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$ - haqiqiy sondir.

T a ' r i f . $\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$ haqiqiy sonni $\vec{a}$ vektorning *moduli* (uzunligi) deyiladi va uni $\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}=|\vec{a}|$ ko'rinishda belgilanadi. Xususiy hol $|\vec{a}|=1$bo'lsa, bunday $\vec{a}$ vektor *birlik vektor* deb ataladi, bundan tashqari, nolь vektorning moduli nolga tengligi ham ravshandir.

4-natija. $\vec{b}=\lambda\vec{a}\Rightarrow\left|\vec{b}\right|=|\lambda|\cdot|\vec{a}|$, chunki $\left|\vec{b}\right|=\sqrt{\lambda\vec{a}\cdot\lambda\vec{a}}=\sqrt{\lambda\left(\vec{a}\cdot\lambda\vec{a}\right)}=\sqrt{\lambda\lambda\left(\vec{a}\vec{a}\right)}=\sqrt{\lambda^2\vec{a}\vec{a}}=|\lambda|\cdot|\vec{a}|$

Teorema. $\forall\vec{a},\vec{b}\in V_E$ uchun

o'rinlidir (Koshi — Bunyachovskiy tengsizligi).

Koshi-Bunyakovskiy tengsizligini $\vec{a}\neq\vec{0}$va $\vec{b}\neq\vec{0}$ vektorlar uchun quyidagicha yozib olaylik: $-1\leq\frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|}\leq1$. Bunda $\frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|}$ kasrni biror ϕ burchak kosinusi deb olish mumkin, ya'ni $cos\,\phi=\frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|}$

Ta'rif. (35) tenglik bilan aniqlanadigan burchaklarning eng kichigi $\vec{a},\vec{b}$ vektorlar orasidagi *burchak* deb ataladi.

$\phi=\frac{\pi}{2}$ da $\vec{a},\vec{b}$ vektorlar *ortogonal* deb ataladi. (35) dan ko'rinib turibdiki, nolь bo'lmagan ikki vektor ortogonal bo'lishi uchun ularning skalyar ko'paytmasi nolga teng bo'lishi zarur va yetarli ekan.

(35) da $\phi=0$ yoki $\phi=\pi$ bo'lsa, $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|;$ ga asosan $\vec{a}=\lambda\cdot\vec{b}$ yoki $\vec{a}\,//\,\vec{b}$

$(35)\Rightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|cos\,\phi;\qquad(36)$

Demak, ikki vektorning skalyar ko'paytmasi shu vektorlar modullari bilan ular orasidagi burchak kosinusining ko'paytmasiga teng.

Endi V_E ning bezisi masalasiga to'xtalaylik.

Ta'rif. V_n dagi $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots \vec{e}_n$ bazis vektorlarning har biri birlik vektor bo'lib, ularning istalgan ikkitasi o'zaro ortogonal bo'lsa, bunday vektorlar sistemasi ortonormalangan *bazis* (yoki *dekart bazisi)* deb ataladi, uni ham odatdagidek B = { $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots \vec{e}_n$ } deb belgilaylik.

p o'lchovli yevklid fazosi

T a ' r i f . Eltuvchisi V_E bo'lgan *(p* o'lchovli vektorli yevklid fazosi) *p* o'lchovli affin fazo *p o'lchovli yevklid fazosi* deb ataladi va Ye_p bilan belgilanadi.

Demak, elementlari nuqta va vektor deb atalgan bo'sh bo'lmagan to'plam $I_{1\text{-}4}$, $II_{1\text{-}4}$, $\mathrm{III}_{1\text{-}2}$ aksiomalar**ni** qanoatlantirsa, u to'plam *n* o'lchovli yevklid fazosi bo'ladi.

Ta'rifdan ko'rinadiki, *p o'lchovli* affin fazoning barcha ta'rif va teoremalari Ye_p da ham o'z kuchini saqlaydi.

E_p dagi nuqtaning koordinatalaryaii 30- § dagidek ta'riflasak hamda dekart reperini B = { $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots \vec{e}_n$ } deb olsak $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots \vec{e}_n$ ortonormalangan bazis), u holda uch o'lchovli yevklid fazosi singari Ye_p da qator masalalarni hal qilish mumkin. Biror dekart reperida $A(x_1\ x_2\ ..., x_p)$, $V(y_1\ y_2, \ldots, u_p)$ ni olaylik.

Ta'rif. Ye_p dagi A, B nuqtalar aniqlagan $\overrightarrow{AB}$ vektor uzunligi shu *ikki nuqta orasidagi masofa* deb ataladi va *r(A, V)* bilan belgilanadi.

Ta'rifga asosan $\rho(A,B) = |\overrightarrow{A,B}|$.. 30-§ dagk (13) ni eslasak**,** $\overrightarrow{AB} = \{y_1 - x_1, y_2 - x_2, \ldots\ldots, y_n - x_n,\}$ (39) formuladan:

$$\rho(AB) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \ldots\ldots + (y_n - x_n)^2} \quad (41)$$

Bu formula Ye_n dagi ikki nuqta orasidagi masofani topish formulasidir.

Teorema. Ye_p dagi ixtiyoriy uchta *A, V, S* nuqta uchun

$\rho(A,C) \le \rho(A.B) + \rho(B,C)$ o'rinlidir.