33-Mavzu: Affin almashtirishlar. Affin almashtirishlar gruppasi va uning qism gruppalari

Reja:

1. Affin almashtirishlar
2. Affin almashtirishlar gruppasi
3. Affin almashtirishlar qism gruppasi

O'quv mashg'ulotining maqsadi: Affin almashtirishlar, affin almashtirishlar gruppasi va ularning qism gruppalari haqida to'liq tasavvurini shakllantirish.

Affin almashtirishlar

A_p da ikki $B=\{O,e_1,e_2,e_3,...,e_n\}$va $B'=\{O,e_1,e_2,e_3,...,e_n\}$ penep berilgan bo'lsin. Bu reperlar yordamida A_p ning nuqtalari orasida shunday f moslik o'rnatamizki, ixtiyoriy $M\in A_n$ nuqta B reperda qanday koordinatalarga ega bo'lsa, uning obrazi $M' = f\ (M)$ nuqta B' reperda xuddi shunday koordinatalarga ega bo'lsii, ravshanki, bu moslik o'zaro bir qiymatli bo'lib, A_p ni o'z-o'ziga o'tkazadi, demak, f biror almashtirishdir.

1-ta'rif. Yuqoridagicha aniqlangan f almashgirish A_n *ni affin almshtiriish* deb ataladi.

Bu ta'rifdan ko'rinadiki, affin almashtirish bir jufg affin reperlarning berilishi bilan to'la aniqlanadi.

Endi affin almashtirishning qator xossalari bilan tanishaylik.

1°. f affin almashtirishda $\vec{a}\in A_n$ vektor shu fazoning biror $\overrightarrow{\mathrm{f(a)}}=\vec{\mathrm{a}}$

vektoriga almashadi, chunki IV$_2$ ga asosana $\vec{a}=\overrightarrow{MN}$ desak, M, N nuqtalarning obrazlari $f(M) = M'$, $f(N) = N'$ bo'lib, bu nuqtalar ham A_p ga tegishli bo'lgani uchun ularga mos kelgan avektor $f(\vec{a})$ bo'ladi.

Xususiy holda, nolь vektor yana nolь vektorga almashadi.

2°. f affin almashtirishda $\vec{a}$ vektorning koordinatalari V qanday bo'lsa, unga mos kelgan $\vec{a}$ vektorning ham koordinatalari V' da xuddi shu sonlardan iborat bo'ladi.

Bu xossa f ning ta'rifi va 1° dan bevosita kelib chiqadi.

3°. f affin almashtirishda ikki vektorning yig'indisiga mos kelgan vektor qo'shiluvchi vektorlarga mos kelgan vektorlar yig'indisidan iborat, ya'ni $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c} \Rightarrow f(\vec{c})= f(\vec{a})+ f(\vec{b})$.

Bu xossaning o'rinli ekanligiga ishonch hosil qilish uchun koordinatalar

bilan berilgaa vektorlarni qo'shish qoidasini eslasak f ning ta'rifini e'tiborga olsak, kifoyadir.

4°. $k\vec{a}$ vektorga mos kelgan vektor $kf(\vec{a})=k\vec{a}'$ vektordir.

Bu ikki 3°, 4° xossadan f almashtirishda $\lambda_1\vec{a}+\lambda_2\vec{a}_2+...+\lambda_k\vec{a}_k$ vektorga $\lambda_1\vec{a}'+\lambda_2\vec{a}_2'+...+\lambda_k\vec{a}_k'$ vektorning mos kelishi kelib chiqadi, ya'ni f da vektorlarning chiziqli kombinatsiyasi saqlanadi, demak, chiziqli erkli vektorga yana chiziqli erkli vektorlar mos keladi. Bu xossalarni va 4- § dagi ikki affin fazoning izomorfligi ta'rifini e'tiborga olsak, affin almashtirishning quyidagi ikkinchi ta'rifi kelib chiqadi.

2 - t a ' r i f. A_p fazoning o'z-o'ziga izomorf akslanishi A_n dagi *affin almashtirish* deb ataladi.

3 - t a ' r i f. [M N] kesmani R nuqta λ nisbatda bo'lsa (ya'ni $\overrightarrow{MP}=\lambda\overrightarrow{PN}$ bo'lsa), u holda λ son *M*, *N*, *R* nuqtalarning *oddiy nisbati* deb atalib, uni odatdagidek $\lambda=(MN,P)$ ko'rinishda belgilanadi.

Demak, $\overrightarrow{MN}=\lambda\overrightarrow{PN} \Leftrightarrow \lambda=(MN,P)$ u holda 4-xossani e'tiborga olsak, affin almashtirishda nuqta berilgan kesmani qanday nisbatda bo'lsa, uning obrazi xam berilgan kesma obrazini shu nisbatda bo'ladi, degan xulosaga kelamiz, demak, affin almashtirishda uch nuqtaning oddiy nisbati saqlanadi.

5°. f affin almashtirishda k o'lchovli P_k tekkislik yana k o'lchovli Π_k' tekislikka almashadi, ya'ni tekislikning o'lchovi f uchun invariantdir.

6°. f affin almashtirishda parallel tekisliklar yana parallel tekisliklarga o'tadi.

Bu xossa affin almashtirishning o'zaro bir qiymatli ekanligidan kelib chiqadi (buni to'liq isbotlashni o'quvchiga topshiramiz).

35-§. Affin almashtirishlar gruppasi va uning qism gruopalari

Ma’lumki, almashtirishlar to’plamining gruppani hosil qilishi uchun quyidagi ikki shart bajarilishi kerak.

1. SHu to’plamdagi ixtiyoriy ikki almashtirish ko’paytmasi (kompozitsiyasi) yana shu to’plamga tegishli almashtirish;
2. SHu to’plamdagi har bir almashtirishga teskari almashtirish ham shu to’plamga qarashli.
A_p ning barcha almashtirishlari to’plamini A bilan belgilaylik. Bu to’plam bo’sh bo’lmasdan, balki uning elementlari avvalgi paragrafdagi muhokamamizga asosan cheksiz ko’pdir. A to’plamning elementlari yuqoridagi ikki shartni qanoatlantirishini ko’rsatamiz.

Ravshanki, f affin almashtirish bo’lsa, u bir juft B, B' affin reperlarning berilishi bilan to’la aniqlanadi (affin almashtirish ta’rifiga asosan) va, aksincha.

1. Agar f affin almashtirish B, B' reperlar bilan aniqlangan bo’lib, g affin almashtirish B, B'' reperlar bilan aniqlansa, u holda B, B'' reperlar bilan aniqlangan affin almashtirish berilgan affin almashtirishlar ko’paytmasidan iborat:

$$f, g \in A \Rightarrow g \cdot f \in A.$$

2. f affin almashtirish B, B' bilan aniqlansa, B', B bilan aniqlangan affin almashtirish f ning teskarisi f^{-1}, ya’ni

$$f \in A \Rightarrow f^{-1} \in A.$$

Demak, A to’plam gruppa tashkil qiladi, uni qisqacha *affin gruppa* deb ataladi.

Endi almashtirishlar gruppasining invarianta tushunchasini kiritamiz. G biror almashtirish gruppasi bo’lib, G' ixtiyoriy figura bo’lsin. G ning istalgan almashtirishida G' figura biror G'' figuraga almashganda G' ning G'' uchun ham o’rinli bo’lib qoladigan xossalari G' ning G gruppaga nisbatan *invariantlari* deb ataladi. U holda affin gruppaning invariantlari oldingi paragrafdagi xossalarini e’tiborga olsak quyidagilar bo’ladi:

1. Har qanday affin almashtirishda k o’lchovli tekislik yana k o’lchovli tekislikka o’tgani uchun tekislikning o’lchovi A ga nisbatan invariantdir. A
2. Har qanday affin almashtirishda uch nuqtaning oddiy nisbati A ga nisbatan invariantdir.
3. Affin almashtirishda parallel tekisliklar yana parallel

tekisliklarga o’tgani uchun parallellik munosabati A ga nisbatan invariantdir.

Bu tushunchalarga asoslanib affin geometriya nimani o’rganadi degan savolga javob berish mumkin.

Affin geometriya p o’lchovli affin fazo figuralarining shunday xossalarini o’rganadiki, bu xossalar affin gruppaga nisbatan invariant bo’ladi (yoki geometriyaning affin almashtirishda figuralarning shu almashtirish gruppasiga nisbatan o’zgarmay qoladigan xossalarini o’rganadigan bo’limi affin geometriya deb ataladi).