27 -мавзу: Ikkinchi tartibli sirtlar. Aylanma sirtlar. Silindrik sirt va uning turlari. Konus sirt. Konus kesimlari.

Режа:

1. Ellipsoid
2. Ikkinchi tartibli sirtlar
3. Aylanma sirtlar.
4. Silindrik sirt va uning turlari.
5. Konus sirt. Konus kesimlari.

Ikkinchi tartibli sirtlar va ularni kanonik tenglamalari

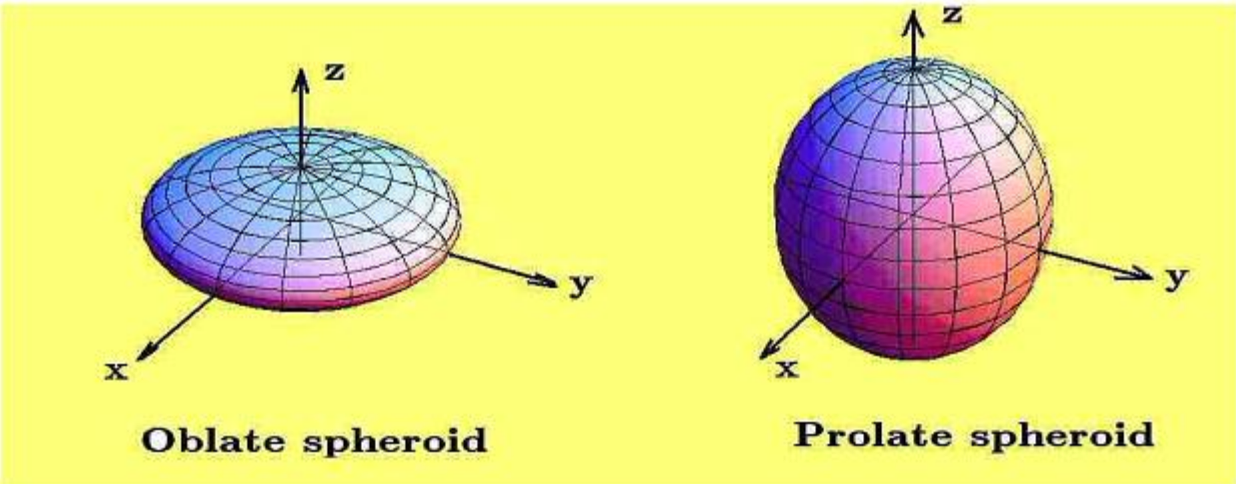
Markazi (x_0,y_0,z_0) nuqtada bo'lgan ellibsoid tenglamasi quidagicha bo'ladi:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1$$

$a=b>c$ Agar bo'lsa siqilgan sferoid deyiladi

$a=b<c$ bo'lsa cho'zilgan sferoid deyiladi

$a=b=c$ bo'lsa radiusi a ga teng bo'lgan sfera deyiladi.



Ellipsoid parametric tenglamasi quyidagicha bo'ladi:

$$x-x_0=a\cos\theta\cos\phi, \qquad y-y_0=b\cos\theta\sin\phi, \qquad z-z_0=c\sin\theta$$

bunda $-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ va $-\pi\le\phi\le\pi$.[1]

---

[1] *(Adabiyot: Introduction to Calculus, Volume I, by J.H. Heinbockel Emeritus Professor of Mathematics Old Dominion University p.p 99-102)* mazmun – mohiyatidan foydalanildi

Endi yuqoridagi sirtlarning xossalarini ko'rib chiqamiz:

Ellipsoid

Fazoda to'g'ri burchakli dekart koordinatalar sistemasi berilgan bo'lsin.

Ta'rif. Koordinatalari

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (1)$$

tenglamani qanoatlantiruvchi fazodagi barcha nuqtalar to'plamini ellipsoid deyiladi.

Bu tenglamani ellipsoidning kanonik tenglamasi deyiladi. Musbat a, b, c sonlarni ellipsoidning yarim o'qlari deyiladi.

Ellipsoidning shaklini va geometrik xossalarini uning kanonik tenglamasidan foydalanib, kesish metodi orqali o'rganamiz.

Ellipsoidning xossalari:

1°. (33.1) tenglama ikkinchi tartibli algebraik tenglama. Shuning uchun ikkinchi tartibli sirt. Demak, (33.1) tenglama bilan berilgan sirt, koordinata tekisliklariga, koordinatalar boshiga va koordinatalar o'qlariga nisbatan simmetrik joylashgan.

2°. Ellipsoidning simmetriya markazini sirtning markazi, simmetriya o'qlari esa uning o'qlari deyiladi.

3°. (33.1) tenglamaning o'ng tomoniga e'tibor beraylik. Uchta musbat son yig'indisi birga teng, demak

$$\frac{x^2}{a^2}\le 1,\ \frac{y^2}{b^2}\le 1,\ \frac{z^2}{c^2}\le 1$$

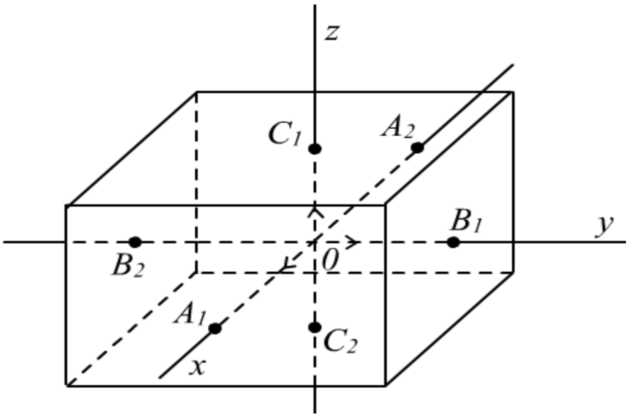
yoki

$$x^2\le a^2,\ y^2\le b^2,\ z^2\le c^2.$$

Bundan

$$-a\le x\le a,\ -b\le y\le b,\ -c\le z\le c \quad (33.2)$$

Ellipsoidning barcha nuqtalari, qirralari $2a$, $2b$, $2c$ dan iborat, markazi koordinatalar boshida bo'lgan parallelepiped ichiga joylashgan (166-chizma).



166-chizma

4°.(33.1) dagi qo'shiluvchilardan biri birga teng bo'lsa, qolganlari nol bo'lishi kerak. $\frac{x^2}{a^2}=1$, $\frac{y^2}{b^2}=0$, $\frac{z^2}{c^2}=0$. Bundan $x=\pm a$, $y=0$, $z=0$. Ellipsoid ox o'qini $A_1(a,0,0)$ va $A_2(-a,0,0)$ nuqtada kesadi. Shunga o'xshash ellipsoid oy o'qini ikkita $B_1(0,b,0)$ va $B_2(0,-b,0)$ nuqtalarda, oz o'qini $C_1(0,0,c)$ va $C_2(0,0,-c)$ nuqtalarda kesadi. Bu A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 nuqtalarni ellipsoidning uchlari deyiladi.

Ellipsoid sirtni koordinatalar tekisligi bilan kesishini tekshiraylik.

5°. a) Ellipsoidni (xoy) koordinata tekisligi $z=0$ bilan kessak, kesimda

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

(xoy) tekisligida yotuvchi ellips hosil bo'ladi.

b) Sirtni (xoz) tekislik bilan, ya’ni $y=0$ tekislik bilan kessak, kesimda (xoz) tekisligida yotuvchi $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ ellips hosil bo’ladi.

v) Ellipsoid (yoz) tekislik bilan kessak, ya’ni $x=0$ tekislik bilan kessak, kesimda shu tekislikda yotuvchi $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ ellips hosil bo’ladi.

Demak, ellipsoidni koordinata tekisliklari bilan kessak, kesimda ellipslar hosil bo’ladi.

6°. Endi ellipsoidni koordinatalar tekisligiga parallel tekisliklar bilan kesimini tekshiraylik.

Koordinata tekisligi (xoy) ga parallel $z=h$ $(h\in R)$ tekislik bilan kesaylik, kesimda

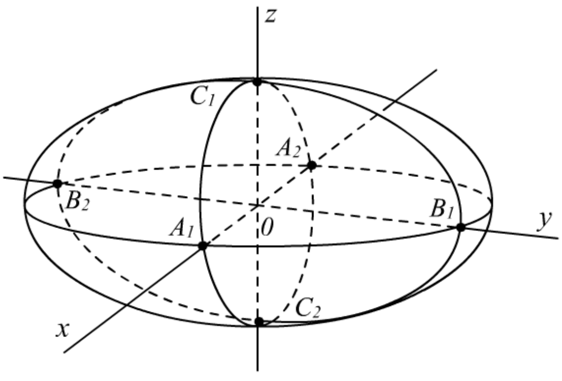
$$\gamma:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{h^2}{c^2} \qquad (33.3)$$

chiziq hosil bo’ladi, bu yerda uch hol o’rinli bo’lishi mumkin:

a) $-c<h<c$, bundan $1-\frac{h^2}{c^2}>0$ bo’lib, γ chiziq markazi $(0,0,h)$ nuqtada va $z=h$ tekislikda yotuvchi ellipsdan iborat.

b) $h=c$ yoki $h=-c$ bo’lsa, (33.3) dan $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$ bo’lib, bu shartni faqatgina $x=0$, $y=0$ qanoatlantiradi. Demak, $z=c$ tekislik bu holda sirt bilan $(0,0,c)$ nuqtada kesishadi.

v) Agar $h>c$ yoki $h<-c$ bo’lsa, $1-\frac{h^2}{c^2}<0$ bo’lib, (33.3) ning o’ng tomonida manfiy, chap tomonida musbat son hosil bo’ladi. Demak, bu holda tekislik ellipsoid bilan kesishmaydi.



167-chizma

Xuddi shunga o’xshash $x=h$, $y=h$ tekisliklar bilan (32.2) sirtning kesimlarini mustaqil hal etishga havola etamiz.

Bu ma’lumotlarga ko’ra ellipsoid shaklini chizamiz (167-chizma).

Xususan: 1) Agar $a=b\neq c$ bo’lsa, oz o’qi atrofida aylanishdan hosil bo’lgan sirtni aylanma ellipsoid deyiladi.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

2) Agar $a=b=c$ bo’lsa, $x^2+y^2+z^2=a^2$ bo’lib, markazi koordinatalar boshida va radiusi a ga teng bo’lgan sferani aniqlaydi.

3) Agar $a\neq b\neq c$ bo’lsa, u holda ellipsoidni uch o’qli ellipsoid deyiladi.

Giperboloidlar

Giperboloid sirtlar ikki xil bo‘ladi. Bir pallali va ikki pallali giperboloidlar. To’g’ri burchakli dekart koordinatalar sistemasi berilgan bo’lsin.

Ta’rif. Koordinatalari

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (34.1)$$

tenglamani qanoatlantiruvchi fazodagi barcha nuqtalarning geometrik o’rni bir pallali giperboloid deyiladi. (34.1) tenglamani bir pallali giperboloidning kanonik tenglamasi deyiladi.

Bu sirtning shaklini va xossalarini aniqlaylik.

1°. Bir pallali giperboloid sirt ikkinchi tartibli sirtdir.

2°. Koordinatalar tekisligiga, koordinatalar o’qlariga (sirt o’qi) va koordinatalar boshiga (sirt markazi) nisbatan simmetrik joylashgan.

3°. Sirtning koordinata o’qlari bilan kesishishini tekshiraylik.

a) ox o’q $(y=0,\ z=0)$ bilan kesishishini tekshiraylik:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}=1 \Rightarrow x=\pm a \qquad A_1(a,0,0) \text{ va } A_2(-a,0,0)$$

demak, ox o’qi bilan ikkita A_1 va A_2 nuqtalarda kesishadi.

b) Shuning singari oy o’q bilan ikkita $B_1(0,b,0)$ va $B_2(0,-b,0)$ nuqtalarda kesishadi.

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \\ x=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow y=\pm b \qquad B_1(0,b,0) \text{ va } B_2(0,-b,0)$$

v) oz o’qi bilan $(x=0,\ y=0)$ kesishmaydi. Haqiqatan,

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \\ x=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow -\frac{z^2}{c^2}=1 \Rightarrow z^2=-c^2$$

Haqiqiy sonlar sohasida bu tenglikning o’rinli bo’lishi mumkin emas. Shuning uchun oz o’qni bir pallali giperboloidning mavhum o’qi deyiladi. ox, oy o’qlarni bir pallali giperboloidning haqiqiy o’qlari deyiladi. Yuqorida hosil qilingan A_1, A_2 va B_1, B_2 nuqtalarni bir pallali giperboloidning uchlari deyiladi.

4°. Bir pallali giperboloidning koordinata tekisliklari bilan kesishishini tekshiraylik.

(34.1) tenglamaga e'tibor beraylik. (xoy) tekislik bilan kessak kesimda ellips hosil bo'ladi. $x=0,\ y=0$ koordinata tekisliklari bilan kessak, kesimda giperbolalar hosil bo'ladi.

5°. Bir pallali giperboloidni koordinata tekisliklariga parallel tekisliklar bilan kesaylik. (oxz) tekisligiga parallel $y=h$ tekislik bilan kesaylik.

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1 \\ y=h \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{h^2}{b^2} \qquad (34.2)$$

Bunda quyidagi hollarni ko'rib chiqaylik:

a) $h=b$ bo'lsa, $(34.2)\Rightarrow \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0$ yoki $\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}\right)\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}\right)=0$ bo'lib, kesim ikkita kesishuvchi to'g'ri chiziqlardan iborat.

b) $-b<h<b$ bo'lsa, $1-\dfrac{h^2}{b^2}>0$ bo'lib, (34.2) quyidagi ko'rinishni oladi.

$$\frac{x^2}{a^2\left(1-\dfrac{h^2}{b^2}\right)}-\frac{z^2}{b^2\left(1-\dfrac{h^2}{c^2}\right)}=1$$

Bu esa $y=h$ tekislikda mavhum o'qi oz ga parallel giperbolani aniqlaydi.

v) $|h|>b$ bo'lsa, $1-\dfrac{h^2}{b^2}<0$ bo'lib, (34.2) tenglama quyidagi ko'rinshni oladi.

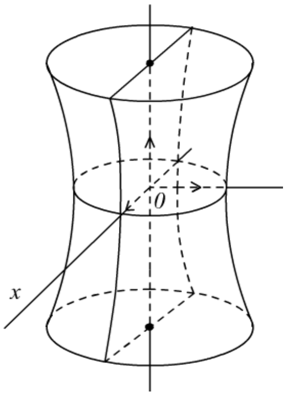
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=-\left(\frac{h^2}{b^2}-1\right) \text{ (bunda } \frac{h^2}{b^2}-1>0\text{)}$$

Bundan

$$-\frac{x^2}{a^2\left(\dfrac{h^2}{b^2}-1\right)}+\frac{z^2}{c^2\left(\dfrac{h^2}{b^2}-1\right)}=1$$

Bu tenglama $y=h$ tekislikdagi giperbola tenglamasi bo'lib, mavhum o'qi ox o'qqa parallel. Agar giperboljidni $x=h$ tekislik bilan kessak, kesimda yuqorida zikr qilingan hollar sodir bo'ladi.

Bir pallali giperboloidning barcha xossalari bu sirtning qanday sirt ekanligini ko'z oldimizda namoyon qiladi (168-chizma).



168-chizma

Agar $a=b$ bo'lsa, (34.1) tenglama

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

ko'rinishga keladi, bu tenglama $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ giperbolani oz o'qi atrofida aylanishdan hosil bo'lgan aylanma giperboloid sirt tenglamasi.

Quyidagi

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad (34.3)$$

yoki

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad (34.4)$$

tenglamalar ham bir pallali giperboloidlar tenglamalari bo'lib, ular mavhum o'qlari bilangina farq qiladi. (34.3) da mavhum o'q oy, (34.4) da mavhum o'q ox dir.

Ta'rif. Koordinatalari

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (34.5)$$

tenglamani qanoatlantiruvchi fazodagi barcha nuqtalarning geometrik o'rni ikki pallali giperboloid deb aytiladi.

(34.5) tenglamani ikki pallali giperboloidning kanonik tenglamasi deyiladi.

Bir pallali giperboloid tenglamasini tekshirishdagi takrorlanadigan ba'zi hollarni ko'rmaymiz.

1°. Ikki pallali giperboloid ikkinchi tartibli sirt.

2°. Ikki pallali giperboloid koordinatalar tekisligiga, koordinatalar o'qiga (sirtning o'qi) va koordinatalar boshiga (sirt markazi) nisbatan simmetrik.

3°. Faqatgina ox o'q bilan $A_1(a,0,0)$ va $A_2(-a,0,0)$ nuqtalarda kesishib boshqa koordinatalar o'qi bilan kesishmaydi. A_1 va A_2 nuqtalarni ikki pallali giperboloidning uchlari deyiladi. ox o'qni haqiqiy o'q, oy va oz o'qlarni mavhum o'q deyiladi. a, b, c sonlarni ikki pallali giperboloidning yarim o'qlari deyiladi.

Bulardan ko'rinib turibdiki, giperboloid oyz koordinatalar tekisligiga nisbatan simmetrik bo'lgan ikkita qismdan iborat, ya'ni ikki palladan iborat.

4°. (34.5) ni oyz tekislikka parallel $x=h$ tekislik bilan kesimini tekshiraylik:

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \\ x=h\end{cases} \Rightarrow -\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{h^2}{a^2}$$

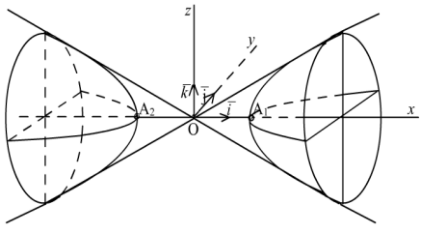
yoki

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=\frac{h^2}{a^2}-1 \qquad (34.6)$$

$|h|>a \Rightarrow \frac{h^2}{a^2}-1>0$. (34.6) tenglama

$$\frac{y^2}{b^2\left(\frac{h^2}{a^2}-1\right)}+\frac{z^2}{c^2\left(\frac{h^2}{a^2}-1\right)}=1$$

ko'rinishga keladi va $x=h$ tekislikda ellipsni aniqlaydi. $h=a$ da kesim faqat bitta $A_1(a,0,0)$ yoki $A_2(-a,0,0)$ nuqtadan iborat.



169-chizma

Boshqa koordinata tekisliklariga va unga parallel tekisliklar bilan kesimda giperbolalar hosil bo'ladi.

Ikki pallali giperbolaning shakli 169-chizmada berilgan.

Agar $b=c$ bo'lsa, (34.5) tenglama

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{b^2}=1$$

ko'rinishni oladi va $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ giperbolani ($y=0$ tekislikda) ox o'qi atrofida aylanishidan hosil qilinadi va uni aylanma ikki pallali giperboloid deyiladi.

$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$$

yoki

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{b^2}=1$$

ko'rinishdagi tenglamalar ham ikki pallali giperboloid bo'lib, birinchisi uchun ox, oy o'qlar, ikkinchisi uchun ox, oz o'qlar mavhum o'qlar bo'ladi.

Paraboloidlar

Ikkinchi tartibli sirtlarning yana bir sinfi paraboloidlar. Bu sirtlar ham ikki turli bo'lib, ular bilan tanishib chiqamiz.

Ta'rif. Koordinatalari

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z \quad (p>0, \quad q>0) \qquad (35.1)$$

tenglamani qanoatlantiruvchi fazodagi barcha nuqtalarning geometrik o'rni elliptik paraboloid deb aytiladi.

(35.1) tenglama elliptik paraboloidning kanonik tenglamasi deyiladi.

Bu tenglamaga ko'ra paraboloidning geometrik xossalarini o'rganib shaklini yasaymiz.

1°. Elliptik paraboloid ham ikkinchi tartibli sirt, koordinatalar boshidan o'tadi.

2°. (35.1) tenglamaga e'tibor beraylik. x va y o'zgaruvchilar juft darajada, u holda elliptik paraboloid oxz va oyz koordinata tekisliklariga nisbatan va oz o'qqa (sirt o'qi) nisbatan simmetrik joylashgan. Bu sirt oxy tekislikka va ox, oy o'qlarga nisbatan simmetrik emas.

Elliptik parabola o'zining o'qi bilan kesishishidan hosil bo'lgan nuqtani elliptik parabolaning uchi deyiladi. Agar sirt o'zining (35.1) kanonik tenglamasi bilan berilsa, u holda koordinatalar boshi uning uchi bo'ladi.

(35.1) ga e'tibor beraylik. Elliptik paraboloid sirtning har bir nuqtasi uchun $z\geq 0$, $z=0$ faqat uchi uchun to'g'ri.

Demak, elliptik paraboloidning uchidan tashqari hamma nuqtalari oxy tekislikning bir tarafida yotadi.

3°. xoy tekislik $(z=0)$ bilan kesishish chizig'i:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{p}+\dfrac{y^2}{q}=2\,z \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{x^2}{p}+\dfrac{y^2}{q}=0 \Rightarrow (0,0,0)$$

4°. $x\,o\,z$ tekislik $(y=0)$ bilan kesishib, kesimda o'qi $o\,z$ dan iborat $x^2=2\,p\,z$ parabola hosil bo'ladi.

5°. $y\,o\,z$ tekislik $(x=0)$ bilan kesganda kesim chizig'i: $y^2=2\,p\,z$ bu ham simmetriya o'qi $o\,z$ dan iborat $y\,o\,z$ tekisligidagi paraboladir.

6°. Elliptik paraboloidni koordinata tekisligiga parallel tekisliklar bilan kesimini tekshiraylik.

$z=h$ tekislik bilan kesim chizig'i:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{p}+\dfrac{y^2}{q}=2\,h \\ z=h \end{cases} \Rightarrow \dfrac{x^2}{p}+\dfrac{y^2}{q}=2\,h \qquad (35.2)$$

Agar $h=0 \Rightarrow z=0$ bo'ladi. 3° hol kelib chiqadi.

Agar $h<0$ bo'lsa, p va q shartga ko'ra musbat. Shuning uchun (35.2) tenglik o'rinli bo'lmaydi.

Agar $h>0$ bo'lsa, (35.2) dan

$$\frac{x^2}{2\,h\,p}+\frac{y^2}{2\,h\,q}=1$$

bo'lib, bu tenglama $z=h$ tekislikdagi ellipsni bildiradi.

Elliptik paraboloid 1-chizmada tasvirlangan.

Agar $p=q$ bo'lsa, u holda (35.1) tenglama

$$x^2+y^2=2\,p\,z$$

ko'rinishida bo'lib, aylanma paraboloid bo'ladi.

Yoqlari $o\,x$ va $o\,y$ dan iborat elliptik paraboloidlar tenglamalar mos ravishda quyidagicha bo'ladi:

$$\frac{y^2}{p}+\frac{z^2}{q}=2\,x$$

va (35.3)

$$\frac{x^2}{p}+\frac{z^2}{q}=2\,y\,.$$

Ta'rif. Koordinatalari

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2\,z \quad (p>0, \quad q>0) \qquad (35.4)$$

tenglamani qanoatlantiruvchi fazodagi barcha nuqtalarning geometrik o'rnini giperbolik paraboloid deb aytiladi.

(35.4) tenglama giperbolik paraboloidning kanonik tenglamasi deyiladi.

Giperbolik paraboloidni (35.4) tenglamasiga ko'ra uning xossalarini o'rganib shaklini yasaymiz.

1°. Giperbolik paraboloid ikkinchi tartibli sirt bo'lib, koordinatalar boshidan o'tadi.

2°. Koordinata o'qlari bilan faqat koordinata boshida kesishadi.

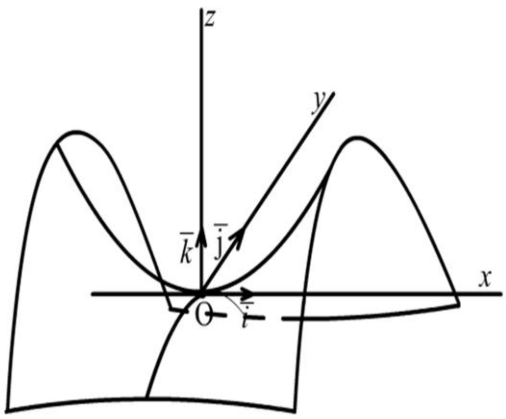
3°. Koordinatalar tekisliklar bilan kesishishini ko'raylik.

a) $z=0$ koordinatalar o'qi bilan kesishib, ikkita $\left(\frac{x}{\sqrt{p}}-\frac{y}{\sqrt{q}}\right)\left(\frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}\right)=0$ kesishuvchi to'g'ri chiziqlarni hosil qiladi.
b) $y=0$ tekislik bilan simmetriya o'qi oz dan iborat $y^2=2pz$ parabola bo'yicha kesishadi.
v) $x=0$ tekislik bilan kesishib, simmetriya o'qi oz bo'lgan $y^2=-2pz$ parabola bo'yicha kesishadi.

4°. Koordinata tekisliklariga parallel tekisliklar bilan kesaylik.

a) xoy tekislikka parallel $z=h>0$ bilan kessak, kesimda $\frac{x^2}{2ph}-\frac{y^2}{2qh}=1$ giperbola hosil bo'ladi.
b) $z=h<0$ bo'lsa, $-\frac{x^2}{2ph}+\frac{y^2}{2qh}=1$ giperbola hosil qilinadi.
Boshqa koordinatalar tekisligiga parallel tekisliklar bilan kesganimizda kesimda doim parabolalar hosil bo'ladi.

Yuqorida ko'rib o'tilgan xossalarga asosan giperbolik paraboloidni 171-chizmadagidek tasvirlanadi, bu sirtni «egar» sirt yoki «egarsimon» sirt deb aytiladi.



171-chizma