26 – мавзу: Ikki ayqash to`g`ri chiziq orasidagi masofa. To`g`ri chiziq bilan tekislikning o`zaro joylashuvi. Ikki to`g`ri chiziq orsidagi burchak.

Режа:

1. Ikki ayqash to`g`ri chiziq orasidagi masofa.
2. To`g`ri chiziq bilan tekislikning o`zaro joylashuvi.
3. Ikki to`g`ri chiziq orsidagi burchak.

To'g'ri chiziq va tekislikka doir ba'zi metrik masalalar

Yuqorida affin koordinatalar sistemasida bayon qilingan to'g'ri chiziqlar nazariyasi to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasida ham o'rinli bo'ladi. Metrik masalalar masalan, kesma uzunligi, burchak kattaligi, yuza, hajm va boshqalar faqat to'g'ri burchakli dekart koordinatalar sistemasida hal qilinadi.

1. Fazodagi ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak.

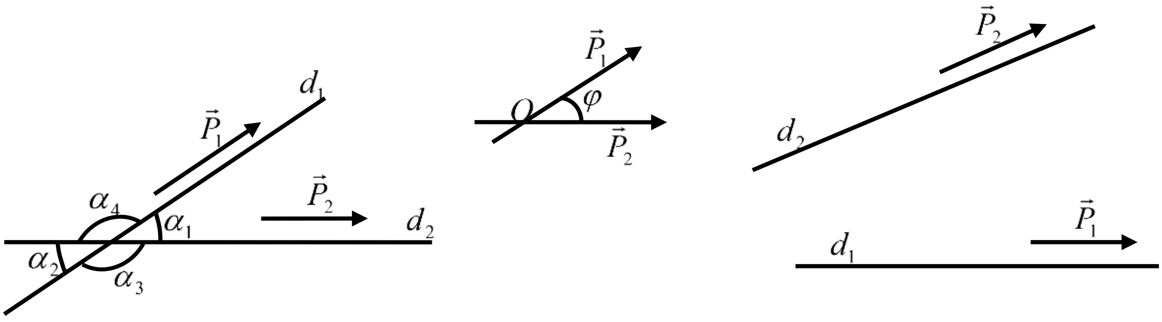
Ikkita d_1 va d_2 to'g'ri chiziqlar kanonik tenglamalari bilan berilgan bo'lsin:

$$d_1: \frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}$$

$$d_2: \frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}$$

d_1 va d_2 to'g'ri chiziqlar yo'naltiruvchi vektorlari $\vec{p}_1(l_1, m_1, n_1)$, $\vec{p}_2(l_2, m_2, n_2)$.

Ta'rif. Ikkita to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak deb, bu to'g'ri chiziqlarning yo'naltiruvchi vektorlari orasidagi burchakka aytiladi (143-chizma).



143-chizma

Ta'rifga ko'ra vektorlar orasidagi burchakni $\left(\vec{p}_1 \hat{\ } \vec{p}_2\right)=\varphi$ bilan belgilab, $\vec{p}_1$ va $\vec{p}_2$ vektorlar skalyar ko'paytmasidan topamiz.

$$\cos\varphi=\frac{l_1 l_2+m_1 m_2+n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\ \sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}} \qquad (20.1)$$

Agar $\vec{p}_1 \perp \vec{p}_2$ bo'lsa, unda $d_1 \perp d_2$ bo'ladi.

(20.1) dan

$$l_1 l_2+m_1 m_2+n_1 n_2=0 \qquad (20.2)$$

shart to'g'ri chiziqlarning perpendikulyarligining yetarli shartidir.

2. Nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa.

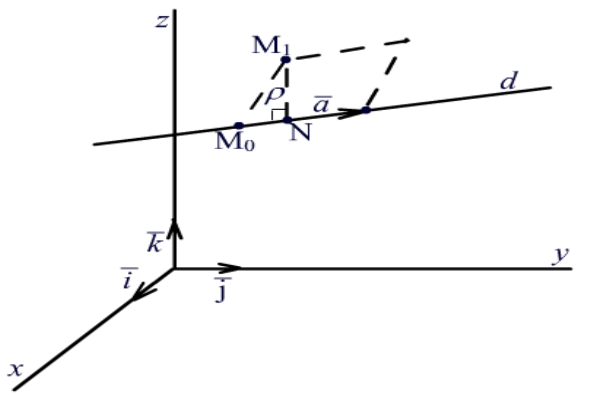
To'g'ri chiziq

$d:\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$

kanonik tenglama bilan va $M_0(x_0, y_0, z_0)\in d$ nuqta berilgan bo'lsin.

Ta'rif. Nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa deb, nuqtadan to'g'ri chiziqqa tushirilgan perpendikulyar uzunligiga aytiladi (144-chizma).

Berilgan $M_1(x_1, y_1, z_1)$ nuqtadan d to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofani $\vec{a}(l, m, n)$ va $M_0M_1(x_1-x_0, y-y_0, z-z_0)$ vektorlarga yasalgan parallelogramm balandligi sifatida topamiz (39-chizma).



144-chizma

$\vec{p}=[M_0M_1\ \ \vec{a}]$ vektor ko'paytmaning $|\vec{p}|$ qiymati parallelogrammning yuziga teng.

$|\vec{p}|=|\vec{a}|\cdot\rho$, $\rho(M_1, d)=\left|\overrightarrow{M_1N}\right|$

Bundan

$$\rho(M_1, d)=\frac{|\vec{p}|}{|\vec{a}|}=\frac{\left|\left[\overrightarrow{M_0M_1}\cdot\vec{a}\right]\right|}{|\vec{a}|} \qquad (20.3)$$

$$\rho(M_1, d)=\frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ m & n\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} z_1-z_0 & x_1-x_0 \\ n & l\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_1-x_0 & y_1-y_0 \\ l & m\end{vmatrix}^2}}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}} \qquad (20.4)$$

Berilgan nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofani hisoblash formulasi.

Ikki to'g'ri chiziq orasidagi eng qisqa masofa. To'g'ri chiziq bilan tekislik orasidagi burchak

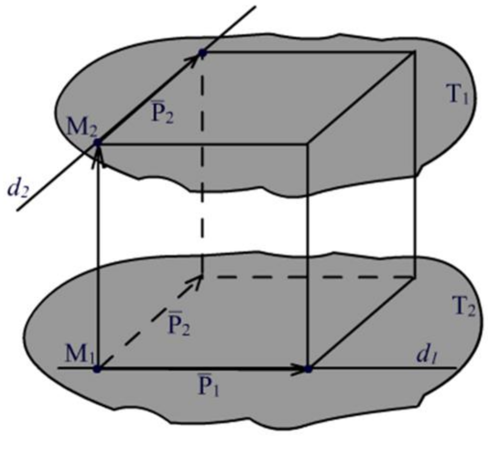
Ta'rif. Ikkita ayqash d_1 va d_2 to'g'ri chiziqlar orasidagi eng qisqa masofa deb, bu to'g'ri chiziqlarning umumiy perpendikulyari uzunligiga aytiladi.

d_1 va d_2 to'g'ri chiziqlar kanonik tenglamalari bilan berilgan bo'lsin.

$d_1:\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}$

$d_2:\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}$.

Bu yerda $M_1(x_1, y_1, z_1)$ va $\vec{p}_1(l_1, m_1, n_1)$ lar d_1 to'g'ri chiziqning nuqtasi va



145-chizma

yo'naltiruvchi vektori. $M_2(x_2, y_2, z_2)$ va $\vec{p}_2(l_2, m_2, n_2)$ lar d_2 to'g'ri chiziqning nuqtasi va yo'naltiruvchi vektori, d_1 to'g'ri chiziq orqali o'tuvchi to'g'ri chiziqqa parallel T_1 tekislikni va d_2 to'g'ri chiziq orqali o'tuvchi d_1 to'g'ri chiziqqa parallel T_2 tekislikni olaylik. Bunday tekisliklar mavjud va bir qiymatli aniqlangan. Bu to'g'ri chiziqlar orasidagi eng qisqa masofa $\rho(d_1, d_2)$ T_1 va T_2 parallel tekisliklar orasidagi masofaga teng.

$\overline{M_1 M_2}$, $\vec{p}_1$ va $\vec{p}_2$ vektorlarga qurilgan parallelepipedni (145-chizma) olaylik. Bu parallelepiped hajmi

$$V = \left|\left(\overline{M_1 M_2}\ \vec{p}_1\ \vec{p}_2\right)\right|$$

teng ekanligi ravshan. Ikkinchi tomondan

$$V = \left|\left[\vec{p}_1\ \vec{p}_2\right]\right| \cdot h,\ h = \rho(d_1, d_2)$$

Bu ikki tenglikdan, ikki ayqash d_1 va d_2 to'g'ri chiziqlar orasidagi masofani hisoblash formulasini chiqaramiz.

$$\rho(d_1, d_2) = \frac{\left|\left(\overline{M_1 M_2}\ \vec{p}_1\ \vec{p}_2\right)\right|}{\left|\left[\vec{p}_1\ \vec{p}_2\right]\right|}$$

yoki

$$\rho(d_1, d_2) = \frac{\mathrm{mod}\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} n_1 & l_1 \\ n_2 & l_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix}^2}} \qquad (21.1)$$

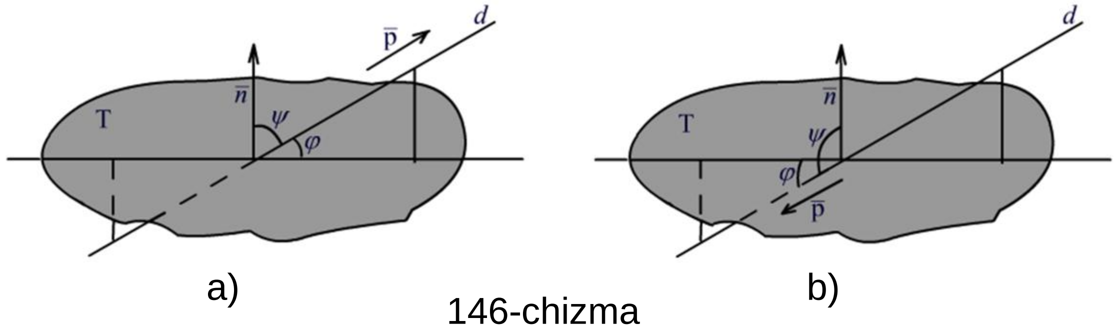
To'g'ri chiziq bilan tekislikning joylashuvi.

T tekislik umumiy tenglama bilan va d to'g'ri chiziq parametrik tenglamasi bilan berilgan bo'lsin:

$\mathrm{T}: Ax + By + Cz + D = 0$, $\vec{n}(A, B, C)$ - normal vektor

$$d: \begin{cases} x = x_0 + l\,t, \\ y = y_0 + m\,t, \\ z = z_0 + n\,t. \end{cases} \qquad \vec{p}(l, m, n) \text{ - yo'naltiruvchi vektor.}$$

Ta'rif. To'g'ri chiziq bilan tekislik orasidagi burchak deb, to'g'ri chiziq bilan uning tekislikdagi proyeksiyasi orasidagi φ burchakka aytiladi (146.a-chizma).



146-chizma

$\Psi = \left(\vec{p} \,\hat{}\, \vec{n}\right)$. Agar $\Psi \le \frac{\pi}{2}$ bo'lsa, u holda $\Psi = 90 - \varphi$ va $\sin\varphi = \cos\Psi$ ekanligi ravshan. Agar $\Psi \ge \frac{\pi}{2}$ bo'lsa, u holda $\varphi = \Psi - \frac{\pi}{2}$ va $\sin\varphi = -\cos\Psi$ (146.b-chizma). $\sin\varphi \ge 0$ bo'lganligi uchun ixtiyoriy φ uchun $\sin\varphi = |\cos\varphi|$.

$\vec{p}\cdot\vec{n} = |\vec{p}|\cdot|\vec{n}|\cdot\cos\Psi$. $\cos\Psi = \frac{\vec{p}\cdot\vec{n}}{|\vec{p}|\cdot|\vec{n}|}$.

Bundan $\sin\varphi$ ni hisoblab formulasini chiqaramiz.

$$\sin\varphi = \frac{|Al + Bm + Cn|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}} \qquad (21.2)$$