24 – mavzu: To`g`ri burchakli dekart koordinatalar sistemasida tekislikka doir ba’zi masalalar

Reja:

1. Nuqtadan tekislikkacha bo’lgan masofa. Ikki tekislik orasidagi burchak.
2. Ikki tekislik orasidagi burchak.

$A_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqta tekislikda berilgan nuqta va n vektor tekislikga perpendikulyar bo’lgan nol bo’lmagan vektor bo’lsin. Tekislikning ixtiyoriy $A(x, y, z)$ nuqtasi bo’lib, $\overrightarrow{A_0A}$ va n vektorlar o’zaro perpendikulyar. Natijada

$$\overrightarrow{A_0A} \cdot \mathbf{n} = 0. \qquad (1)$$

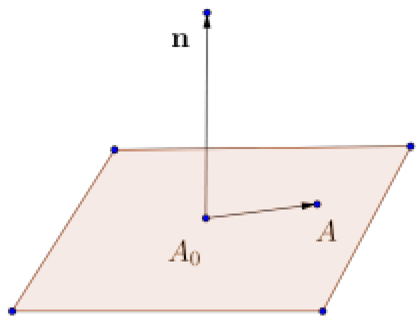
tenglik o’rinli bo’ladi.

a, b, c lar e_x e_y, e_z bazis vektorlar bilan hosil qilingan n vektorning koordinatalari bo’lsin.

U holda $\overrightarrow{A_0A} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OA_0}$, bo’lib, (1) tenglikdan

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0. \qquad (2)$$

kelib chiqadi.



Tekislik tenglamasi

Bu tenglama shartli tenglamadir.

Har qanday tekislikning tenglamasi x, y, z larga nisbatan chiziqli tenglama.

Bundan Dekart koordinatalar sistemasidan boshqasiga o’tilganda ham u chiziqli tenglama bo’lishi kelib chiqadi. Biz bu tekislik tenglamasini Dekart koordinatalar sistemasida chiziqli ekanligini ayta olamiz.

Keling tekislikning boshqa biror ko’rinishdagi tenglamasini qaraylik.

$$ax + by + cz + d = 0$$

x_0, y_0, z_0 lar berilgan tenglamaning yechimlari bo’lsin. U holda

$ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$ tenglik o’rinli bo’lib uni quyidagi

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0. \qquad (3)$$

ko’rinishida ham yozish mumkin.

n vektor e_x, e_y, e_z bazis vektorlar asosida tuzilgan a, b, c koordinatalarga ega vektor A_0 nuqta x_0, y_0, z_0 koordinatali nuqta A nuqta x, y, z koordinatalarga ega nuqta. U holda tenglamani (3) ko’rinishiga ekvivalent

$\overrightarrow{A_0A} \cdot \mathbf{n} = 0.$ ko'rinishini yozishimiz mumkin.

Tekislikning koordinatalar tekisligiga nisbatan joylashuvi

Keling tekslikning koordinatalar boshiga nisbatan joylashuvini uning tenglamasi aniq bir ko'rinishini olingandagi holatlarini aniqlaylik.

1. $a = 0, b = 0$.n vektor z o'qiga parallel. Tekislik xy tekisligiga parallel. Agar d=0 bo'lsa xy tekisligidan idorat bo'ladi.
2. b=0, c=0 bo'lsa tekislik yz tekisligiga parallel bo'ladi. Agar d=0 bo'lsa yz tekisligidan iborat bo'ladi.
3. c=0, a=0 bo'lsa tekislik xz tekisligiga parallel bo'ladi. Agar d=0 bo'lsa xz tekisligidan iborat bo'ladi.
4. a=0, b≠0, c≠0 bo'lsa n vektor x o'qiga perpendikulyar bo'ladi. d=0 bo'lsa x o'qidan iborat bo'ladi.
5. a≠0, b=0, c≠0 bo'lsa y o'qiga parallel bo'ladi. d=0 bo'lsa y o'qidan iborat bo'ladi.
6. a≠0, b≠0, c=0 bo'lsa z o'qiga parallel bo'ladi. d=0 bo'lsa z o'qidan iborat bo'ladi.
7. d=0 bo'lsa [1]

Tekislikning affin koordinatalar sistemasidagi tenglamalarini ko'rib o'tdik. Dekart koordinatalar sistemasi affin koordinatalar sistemasining xususiy holi bo'lgani uchun affin koordinatalar sistemasiga nisbatan chiqarilgan tekislik tenglamalari dekart koordinatalar sistemasida ham o'rinli bo'ladi. Lekin dekart koordinatalar sistemasida o'rinli bo'lgan masalalar affin koordinatalar sistemasida hamma vaqt o'rinli bo'lmaydi, chunki dekart koordinatalar sistemasida metrik xarakterdagi masalalar yechiladi.

Ma'lumki,

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (16.1)$$

affin koordinatalar sistemasiga nisbatan yozilgan tekislikning umumiy tenglamasi. Agar bu tenglamani dekart koordinatalar sistemasida deb qarasak, A, B, C koeffitsiyentlarning muhim geometrik xossalari ma'lum bo'ladi.

Haqiqatan, T tekislikka qarashli qandaydir $N_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqtani olaylik.

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \qquad (16.2)$$

(16.1) tenglamadan (16.2) tenglamani ayirib quyidagini topamiz.

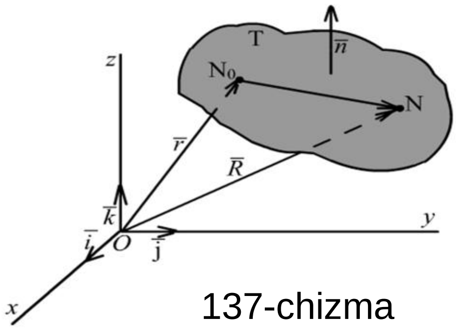
$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \qquad (16.3)$$

bundan $\vec{n}(A, B, C)$ vektor T tekislikdagi ixtiyoriy $N_0N(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ vektorga perpendikulyar degan xulosaga kelamiz. A, B, C sonlar berilgan tekislikka perpendikulyar vektorni aniqlaydi. Uni T tekislikning normal vektori deyiladi va $\vec{n}(A, B, C)$ ko'rinishda belgilanadi.

[1] *College geometry, Csaba Vincze and Laszlo Kozma, 2014 Oxford University pp215-220,* mazmun – mohiyatidan foydalanildi

(16.3) tenglamani $N_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqtadan o'tib, $\vec{n}\,(A, B, C)$ vektorga perpendikulyar tekislik tenglamasi deyiladi.

Endi T tekislikning vektor ko'rinishdagi tenglamasini yozaylik. Fazoda to'g'ri burchakli dekart koordinatalar sistemasi, T tekislikning $N_0(x_0, y_0, z_0)$ va ixtiyoriy $N(x, y, z)$ nuqtalari, $\vec{n}\,(A, B, C)$ normal vektori berilgan bo'lsin (137-chizma). $\overrightarrow{ON_0} = \vec{r}$, $\overrightarrow{ON} = \vec{R}$, $\overrightarrow{N_0N} = \vec{R} - \vec{r}$. $\vec{n}$ vektor tekislikdagi ixtiyoriy $\overrightarrow{N_0N}$ vektorga perpendikulyar.



137-chizma

$$\left(\vec{R} - \vec{r}\right) \cdot \vec{n} = 0 \qquad (16.3)$$

tenglama berilgan nuqtadan o'tib, $\vec{n}$ vektorga perpendikulyar bo'lgan tekislikning vektor tenglamasi.

Nuqtadan tekislikkacha bo'lgan masofa. Ikki tekislik orasidagi burchak.

Berilgan nuqtadan berilgan T tekislikkacha bo'lgan masofani topish masalasi bilan shug'ullanamiz.

Ta'rif. Berilgan M_0 nuqtadan T tekislikkacha bo'lgan masofa deb, shu nuqtadan tekislikka tushirilgan perpendikulyar to'g'ri chiziqning tekislik bilan kesishgan nuqtasi orasidagi masofaga aytiladi.

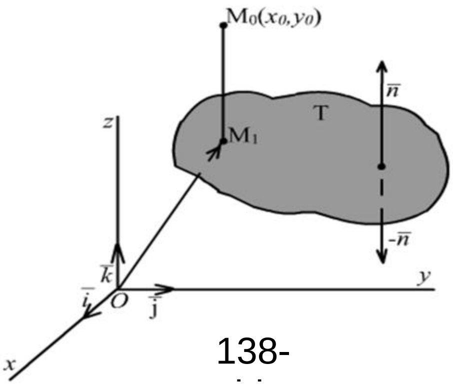
Perpendikulyar asosini M_1 bilan belgilaylik (138-chizma).

$$\rho(M_0, \mathrm{T}) = \left|\overrightarrow{M_1M_0}\right|$$

Tekislik tenglamasi to'g'ri burchakli dekart koordinatalar sistemasiga nisbatan

$\mathrm{T}: A\,x + B\,y + C\,z + D = 0$

tenglama bilan berilgan T tekislikning $\vec{n}$ normal vektori $\vec{n} \;||\; \vec{M_1}\vec{M_0}$, bu vektorlarning skalyar ko'paytmasi:



138-

$$\vec{M_1}\vec{M_0} \cdot \vec{n} = \left|\vec{M_1}\vec{M_0}\right| \cdot |\vec{n}| \cdot \cos\left(\overrightarrow{M_1M_0} \,\hat{}\, \vec{n}\right) = \rho(M_0\ \mathrm{T})\ |\vec{n}|\,(\pm 1) \quad (17.1)$$

bundan

$$\rho(M_0, \mathrm{T}) = \frac{\left|\overrightarrow{M_1M_0} \cdot \vec{n}\right|}{|\vec{n}|}$$

$$M_1(x_1, y_1, z_1) \in \mathrm{T} \Rightarrow A_1\,x + B_1\,y + C_1\,z + D_1 = 0,\ D = -(A_1\,x + B_1\,y + C_1\,z)$$

$\overrightarrow{M_1M_0}(x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1)$

$$\rho(M_0, \mathrm{T}) = \frac{|A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) + C(z_0 - z_1)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|A\,x_0 + B\,y_0 + C\,z_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Shunday qilib, M_0 dan tekislikkacha bo'lgan masofa

$$\rho(M_0, \mathrm{T}) = \frac{|A\,x_0 + B\,y_0 + C\,z_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \qquad (17.2)$$

formula yordamida hisoblanadi.

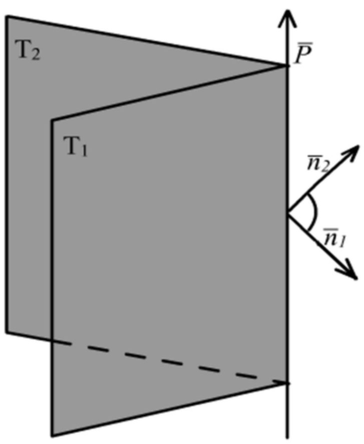
Ikki tekislik orasidagi burchak.

Ikkita kesishuvchi T_1 va T_2 tekisliklar ushbu

$$\begin{aligned} &\mathrm{T}_1 : A_1\,x + B_1\,y + C_1\,z + D_1 = 0 \\ &\mathrm{T}_2 : A_2\,x + B_2\,y + C_2\,z + D_2 = 0 \end{aligned} \qquad (17.3)$$

tenglamalar bilan berilgan. Bu tekisliklar orasidagi burchakni hisoblaymiz.

Ikkita tekislik kesishib to'rtta ikki yoqlik burchaklarni tashkil qiladi. Bu burchaklardan ixtiyoriy bittasini ikki tekislik orasidagi burchak deb olish mumkin. Ma'lumki, ikki yoqli burchak uning chiziqli burchaklari orqali o'lchanadi. T_1 tekislikning normal vektori $\vec{n}_1(A_1, B_1, C_1)$, T_2 tekislikning normal vektori $\vec{n}_2(A_2, B_2, C_2)$ bo'lsa, $\varphi = \left(\vec{n}_1 \,\hat{}\, \vec{n}_2\right)$ burchak chiziqli burchak bilan bir xil bo'ladi (139-chizma).



$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = |\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2| \cdot \cos\varphi$$

bundan

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \quad (17.4)$$

Ikki tekislik orasidagi burchakni hisoblash formulasi. Agar $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \Leftrightarrow \mathrm{T}_1 \perp \mathrm{T}_2$. Demak,

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0 \qquad (17.5)$$

shart ikki tekislikning perpendikulyarlik shartidir.

34-chizma

139-