23 - мавзу: Tekislikning koordinatalar sistemasiga nisbatan vaziyatini tekshirish. Ikkita va uchta tekislikning o`zaro joylashuvi. Tekisliklar dastasi va bog`lami.

Режа:

1. Tekislikning koordinatalar sistemasiga nisbatan vaziyatini tekshirish
2. Ikkita va uchta tekislikning o`zaro joylashuvi.
3. Tekisliklar dastasi va bog`lami.

Koordinatalar sistemasiga nisbatan tekislikning joylashishi

Bizga

$$ax+by+cz+d=0 \qquad (1)$$

tekislik berilgan bo'lsin. Quyidagi hollarni qaraymiz:

($\vec{n}$ vector berilgan tekislikning normal vektori bo'lsin).

1. $a=0,\ b=0$. Bu holatda $\vec{n}$ vektor z o'qiga parallel bo'ladi. Ya'ni (1) tekislik xy tekisligiga parallel bo'ladi va $d=0$ bo'lsa, xy tekisligi bilan ustma-ust tushadi.

2. $b=0, c=0$. Bu holatda (1) tekislik yz tekisligiga parallel bo'ladi va $d=0$ bo'lsa, yz tekisligi bilan ustma-ust tushadi.

3. $a=0, c=0$. Bu holatda (1) tekislik xz tekisligiga parallel bo'ladi va $d=0$ bo'lsa, xz tekisligi bilan ustma-ust tushadi.

4. $a=0, b\neq 0, c\neq 0$. Bu holatda $\vec{n}$ vector x o'qiga perpendikulyar bo'ladi. Ya'ni (1) tekislik x o'qiga parallel bo'ladi va $d=0$ bo'lsa, x o'qidan o'tadi.

5. $a\neq 0, b=0, c\neq 0$. Bu holatda (1) tekislik y o'qiga parallel bo'ladi va $d=0$ bo'lsa, y o'qidan o'tadi.

6. $a\neq 0, b\neq 0, c=0$. Bu holatda (1) tekislik z o'qiga parallel bo'ladi va $d=0$ bo'lsa, z o'qidan o'tadi.

7. $d=0$ holida (1) tekislik koordinata boshidan o'tadi.

Agar (*) tekislikning barcha koeffisientlari noldan farqli bo'lsa tenglikning ikkala tomonini $-d$ ga bo'lish mumkin. Natijada

$$\frac{-d}{a}=\alpha\ ,\ \frac{-d}{b}=\beta\ ,\ \frac{-d}{c}=\gamma$$

(1) tenglamani quyidagi ko'rinishda yozish mumkin.

$$\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}+\frac{z}{\gamma}=1 \qquad (*)$$

α, β, γ sonlar tekislikni koordinata o'qlari bilan kesishishidan hosil bo'lgan kesmalarga teng.

Haqiqatdan ham tekislik x o'qini ($y=0, z=0$) $(\alpha,0,0)$ nuqtada, y o'qini ($x=0, z=0$) $(0,\beta,0)$ nuqtada, z o'qini ($x=0, y=0$) $(0,0,\gamma)$ nuqtada kesib o'tadi.

Agar tekislik xy tekisligiga perpendikulyar bo'lmasa ($c\neq 0$) tekislikni quydagicha tenglama bilan yozish mumkin.

$$z = px + qy + l$$

Misollar:
1.Quyidagi tekislik x (y, z)o'qining musbat yo'nalishi bilan kesishish shartini toping.

$$ax+by+cz+d=0$$

2. $ax+by+cz+d=0$ tekislik koordinata o'qlari bilan kesishishidan hosil bo'lgan tetraedrning hajmini toping.
3.Quyidagi sakkizta $|x|+|y|+|z|=a$ tekisliklarning kesishishidan hosil bo'lgan figuraning oktaedr ekanini ko'rsating va uning markazi koordinatalar boshida joylashganini isbotlang.

Tekisliklarning o'zaro vaziyati

Faraz qilaylik bizga ikkita

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0 \end{cases} \qquad (*)$$

Tekisliklar berilgan bo'lsin.
Qanday shart bajarilganda bu tekisliklar: a) parallel b) perpendikulyar bo'lish shartini topaylik.
Ikkita tekislik parallel bo'lishi uchun ularning mos normal vektorlari $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ parallel bo'ladi.
Bundan tekisliklarning parallellik sharti

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$$

kelib chiqadi.
Ikkita tekislik perpendikulyar bo'lishi uchun ularning mos normal vektorlari $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ perpendikulyar bo'ladi. Bundan tekisliklarning perpendikulyarlik sharti

$$\vec{n}_1\vec{n}_2=0 \text{ yoki } a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0$$

kelib chiqadi.
Tekisliklar orasidagi burchakni topish formulasini keltirib chiqaraylik.
θ orqali $\vec{n}_1$ va $\vec{n}_2$ vektorlar orasidagi burchakni belgilasak ikkita tekislik orasidagi burchak ham θ ga teng bo'ladi.

$$\vec{n}_1\vec{n}_2=|\vec{n}_1||\vec{n}_2|\cos\theta$$

ekanidan quyidagi formula kelib chiqadi.[1]

$$\cos\theta=\frac{a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\cdot\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$$

[1] Csaba Vincze and Laszlo Kozma 'College Geometry' March 27, 2014 pp 218-220, mazmun – mohiyatidan foydalanildi

Ikkita va uchta tekislikning o’zaro vaziyatlari.

1. Ikkita tekislikning o’zaro vaziyati.

Biror affin koordinatalar sistemasiga nisbatan T_1 va T_2 tekisliklar o’zining tenglamalari bilan berilgan bo’lsin.

$$T_1 : A_1\, x + B_1\, y + C_1\, z + D_1 = 0 \qquad (14.1)$$

$$T_2 : A_2\, x + B_2\, y + C_2\, z + D_2 = 0 \qquad (14.2)$$

Bu tekisliklarning o’zaro vaziyatlarini tekshiraylik. T_1 va T_2 tekisliklarning har bir umumiy nuqtasining koordinatalari (14.1) va (14.2) tenglamalar sistemasining yechimlari bo’ladi. Aksincha tenglamalar sistemasining har bir yechimi T_1 va T_2 tekisliklarning umumiy nuqtalarining koordinatalari bo’ladi.

Shunday qilib, ikkita tekislikning o’zaro vaziyatlarini tekshirish masalasi (14.1), (14.2) chiziqli tenglamalar sistemasini tekshirish masalasiga keltiriladi. Quyidagi matritsalarni tuzib olamiz:

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix},\ M' = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix}$$

M matritsa rangini r bilan belgilab, asosiy matritsa, M' matritsa rangini r' bilan belgilab kengaytirilgan matritsa deb aytiladi. $r \le r'$ bo’lishi ravshan.

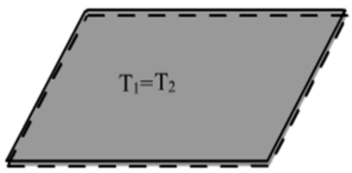
Bu yerda tekisliklar quyidagi hollarda bo’lishi mumkin.

1) $r' = 1$ bo’lsa, T_1 va T_2 tekisliklarning koeffitsiyentlari va ozod hadlari proporsional bo’ladi.

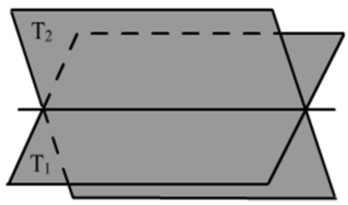
$$A_1 = \lambda\, A_2,\ B_1 = \lambda\, B_2,\ C_1 = \lambda\, C_2,\ D_1 = \lambda\, D_2 \qquad (14.3)$$

Bu holda (14.1) va (14.2) tenglamalar teng kuchli bo’ladi. Ular bitta tekislikni ifodalaydi, ya’ni T_1 va T_2 tekisliklar ustma-ust tushadi (133-chizma).

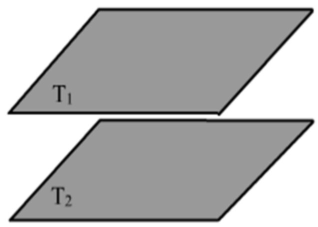
2) $r = r' = 2$. Bunda T_1 va T_2 tekisliklar har xil (ular ustma-ust tushishi mumkin emas, chunki $r' > 1$). Demak T_1 va T_2 tekisliklar kamida bitta umumiy nuqtaga ega,



133-chizma



134-chizma



135-chizma

shuning uchun ular to’g’ri chiziq bo’ylab kesishadi (134-chizma).

3) $r' = 2$, $r = 1$. (14.1) va (14.2) tenglamalar sistemasi yechimga ega emas, shuning uchun T_1 va T_2 tekisliklar umumiy nuqtaga ega emas. Demak, tekisliklar kesishmaydi, (135-chizma).

$$A_1 = \lambda\, A_2,\ B_1 = \lambda\, B_2,\ C_1 = \lambda\, C_2 \qquad (14.4)$$

(43) shart tekisliklarning ustma-ust tushish sharti (44) shart esa tekisliklarning parallellik sharti.

2. Uchta tekislikning o’zaro vaziyati.

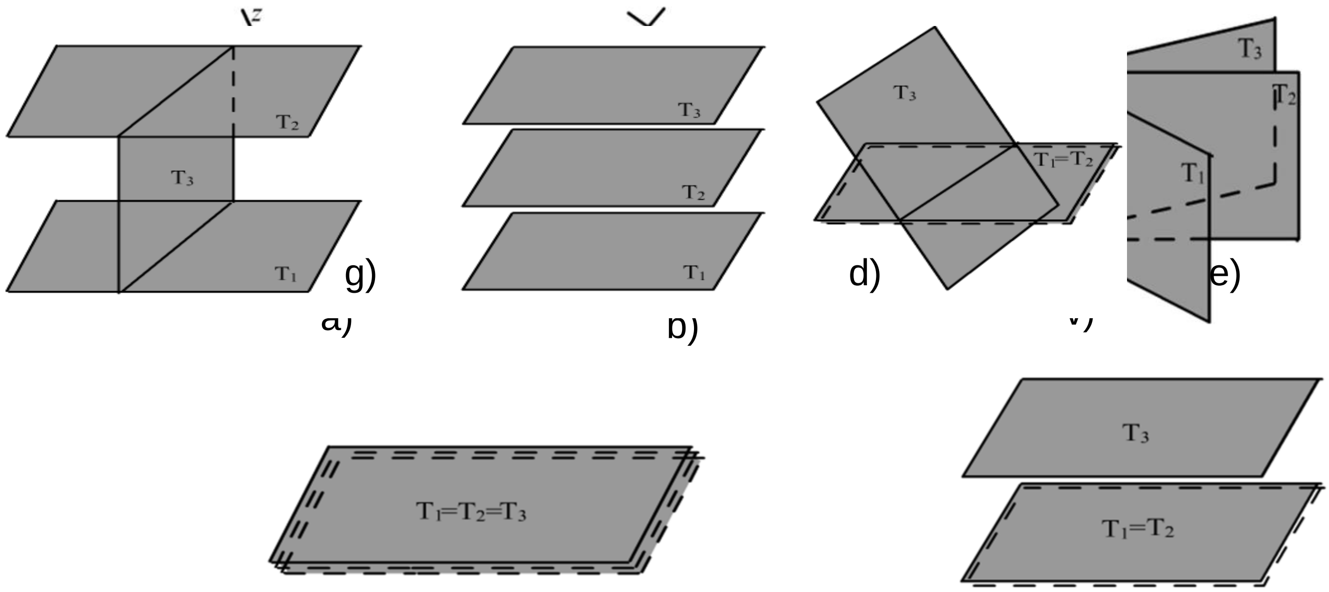
Biror affin koordinatalar sistemasida T_1, T_2 va T_3 tekisliklar o'zlarining umumiy tenglamalari bilan berilgan bo'lsin.

$$T_1 : A_1\,x + B_1\,y + C_1\,z + D_1 = 0$$
$$T_2 : A_2\,x + B_2\,y + C_2\,z + D_2 = 0 \qquad (14.5)$$
$$T_3 : A_3\,x + B_3\,y + C_3\,z + D_3 = 0$$

Berilgan tenglamalarning koeffitsiyentlaridan quyidagi matritsalarni tuzamiz.

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix}, \; M' = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix}$$

Bu tekisliklarning quyidagi sakkizta hollardan bir bo'lishini chizmalar orqali ko'rsatamiz (31-chizma).



j) 136-chizma z)

a) T_1, T_2, T_3 tekisliklar bitta umumiy nuqtaga ega $r = r' = 3$ (136, a-chizma).

b) T_1, T_2, T_3 tekisliklar juft-jufti bilan kesishadi, lekin umumiy nuqtasi mavjud emas $r = 2, r' = 3$ (136, b-chizma).

v) T_1, T_2, T_3 tekisliklar bir to'g'ri chiziqdan o'tib har xildir $r = 2, r' = 2$ (136, v-chizma).

g) Bu tekisliklarning ikkitasi parallel, uchinchisi ularni kesadi $r = 2, r' = 3$ (136. g-chizma).

d) Uchchala tekislik o'zaro parallel $r = 1, r' = 2$ (136.d-chizma).

e) Ikkita tekislik ustma-ust tushadi, uchinchisi esa ularni kesadi $r = 1, r' = 2$ (136.e-chizma).

j) Hamma tekisliklar ustma-ust tushadi $r = 1, r' = 1$ (136.j-chizma).

z) Ikkita tekislik ustma-ust tushadi, uchinchisi esa ularga parallel $r = 1, r' = 2$ (136.z-chizma).

Tekisliklar dastasi va bog'lami.

Kesishuvchi ikkita T_1, T_2 tekisliklar ushbu

$$\begin{aligned} T_1 &: A_1\, x + B_1\, y + C_1\, z + D_1 = 0 \\ T_2 &: A_2\, x + B_2\, y + C_2\, z + D_2 = 0 \end{aligned} \qquad (15.1)$$

tenglamalar bilan berilgan bo'lsin, bunda M - matritsa rangi 2 ga teng. demak, bu tekisliklar d to'g'ri chiziq bo'ylab kesishadi. T_1 tekislik tenglamasini $\lambda \neq 0$ ga ko'paytirib, T_2 tekislik tenglamasini $\mu \neq 0$ ko'paytirib qo'shamiz.

$$\lambda\left(A_1\, x + B_1\, y + C_1\, z + D_1\right) + \mu\left(A_2\, x + B_2\, y + C_2\, z + D_2\right) = 0$$

yoki

$$\left(\lambda\, A_1 + \mu\, A_2\right)x + \left(\lambda\, B_1 + \mu\, B_2\right)y + \left(\lambda\, C_1 + \mu\, C_2\right)z + \lambda\, D_1 + \mu\, D_2 = 0\,. \quad (15.2)$$

Bu yerda x, y, z koeffitsiyentlardan kamida biri noldan farqli, aks holda $\lambda\, A_1 + \mu\, A_2 = 0$, $\lambda\, B_1 + \mu\, B_2 = 0$, $\lambda\, C_1 + \mu\, C_2 = 0$ bo'lsa, bulardan

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = -\frac{\mu}{\lambda} \qquad (15.3)$$

bo'lib, M - matritsa rangi 2 dan kichik bo'lardi. Bu berilishga ziddir. Demak, (15.1) tenglama biror T tekislik tenglamasi bo'ladi. d to'g'ri chiziq har bir nuqtasining koordinatalari (15.2) tenglamalar sistemasini qanoatlantirgani uchun, (15.2) tenglamani ham qanoatlantiradi.

λ, μ parametrning har bir qiymatiga d to'g'ri chiziqdan o'tuvchi bitta tekislikni ifoda qiladi.

Ta'rif. Fazodagi ixtiyoriy d to'g'ri chiziq orqali o'tuvchi barcha tekisliklar to'plamini tekisliklar dastasi deyiladi. d to'g'ri chiziq dasta o'qi, (15.2) tenglamani dasta tenglamasi deyiladi.

Ma'lumki, d dasta o'qida yotmaydigan fazoning ixtiyoriy nuqtasidan dastaning faqat bitta tekisligi o'tadi. 31, v-chizmaga e'tibor bering.

Fazodagi biror T tekislikka parallel bo'lgan barcha tekisliklar to'plamini parallel tekisliklar dastasi deyiladi. 31, d-chizmaga e'tibor bering.

Berilgan $T: Ax + By + Cz + D = 0$ tekislikka parallel bo'lgan barcha tekisliklar to'plami tenglamasi ushbu

$$Ax + By + Cz + \lambda = 0 \qquad (15.4)$$

ko'rinishda yoziladi. λ ning har bir qiymatida berilgan tekislikka parallel tekislik hosil bo'ladi. Agar $\lambda = D$ bo'lsa, T tekislikning o'zi hosil bo'ladi.

Fazoning har bir nuqtasi orqali dastaning faqat bitta tekisligi o'tadi.

Ta'rif. Fazodagi M_0 nuqtadan o'tuvchi barcha tekisliklar to'plamini tekisliklar bog'lami deyiladi. M_0 nuqta bog'lam markazi deyiladi.

Bog'lam markazining berilishi bilan to'liq aniqlanadi.

Markazi $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqtada bo'lgan bog'lam tenglamasini tuzaylik.

$T_1: A_1\, x + B_1\, y + C_1\, z + D_1 = 0$ tekislik M_0 nuqtadan o'tadi. $A\, x_0 + B\, y_0 + C\, z_0 + D = 0$ bu tengliklardan ushbuni

$$A\left(x - x_0\right) + B\left(y - y_0\right) + C\left(z - z_0\right) = 0 \qquad (15.5)$$

tenglamani hosil qilamiz. Bu M_0 nuqtadan o'tuvchi tekislik tenglamasi. A, B, C larning kamida bittasi noldan farq qiladi.

Bu koeffitsiyentlarning har bir qiymatiga M_0 nuqtadan o'tuvchi tekislik mos keladi. Shuning uchun (15.5) tenglamani markazi M_0 nuqta bo'lgan tekisliklar bog'lami tenglamasi deyiladi.

Markaziy bog'lam bir nuqtada kesishuvchi uchta tekislikning berilishi bilan to'liq aniqlanadi (31, a-chizma).

$T_1: A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$

$T_2: A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$

$T_3: A_3 x + B_3 y + C_3 z + D_3 = 0$

tekisliklar berilgan bo'lsin.

$$\alpha\left(A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1\right) + \beta\left(A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2\right) + \gamma\left(A_3 x + B_3 y + C_3 z + D_3\right) \quad (15.6)$$

uchta tekislik bilan berilgan bog'lam tenglamasi.

Ta'rif. Fazodagi aniq bir d to'g'ri chiziqqa parallel barcha tekisliklar to'plami parallel tekisliklar bog'lami yo'ki markazsiz bog'lam deyiladi.

d to'g'ri chiziqni bog'lam yo'naltiruvchisi deyiladi.

Markazsiz bog'lam d to'g'ri chiziqning berilishi bilan to'liq aniqlaniladi.