21 – мавзу: Koordinata o`qlarini burish va parallel ko`chirish bilan ikkinchi tartibli chiziqning umumiy tenglamasini kanonik ko`rinishga keltirish

Reja:

1. **Ikkinchi tartibli chiziqning umumiy tenglamasini.**
2. **Koordinata o'qlarini burish.**
3. **Ikkinchi tartibli chiziqning umumiy tenglamasini kanonik ko'rinishga keltirish**

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{h^2}{c^2}$$

tenglama bilan aniqlanuvchi ellips hosil bo'ladi.Bu tenglamani

$$\frac{x^2}{\left(a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}\right)^2}=1$$

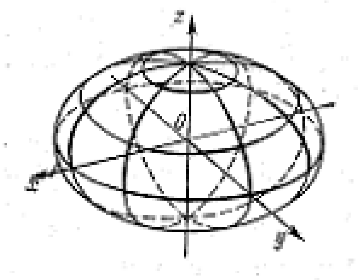
ko'rinishda yozish mumkin.

ko'rinishda yozish mumkin bo'lsa , u ikki pallali giperboloid deb ataladi.Bu tenglamada $a \ge b > 0$, $c > 0$ *munosabatlar bajarilishi talab qilinadi.*

Ikki pallali giperboloid tenglamasidan ko'rish mumkinki,uchinchi o'zgaruvchi $z \le c$ va $z \ge c$ tengsizliklarni qakoatlantirishi kerak. Demak
ikki pallali giperboloid ikki qismdan iborat va uning nomi shakliga mosdir.Agar ikki pallali giperboloidni $z = h$ tenglama bilan aniqlangan tekislik bilan kessak, $|h| > c$ bo'lganda kesimda

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2}{c^2}-1$$

Xuddi shunday,ellipsoidni Oxz, Oyz tekisliklariga parallel tekisliklar bilan bilan kessak, kesimda ellipslar hosil bo'ladi. Yuqoridagilarni hisobga olib,ellipsoidni chizmada tasvirlashimiz mumkin.



Chizma-1

Ta'rif-2. Ikkinchi tartibli sirt tenglamasini birorta dekart koordinatalari sistemasida

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \qquad (3)$$

tenglama bilan aniqlanuvchi ellips hosil bo'ladi.Bu ellipsning yarim o'qlari mos ravishda

$$a\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}, \qquad b\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}$$

kattaliklarga tengdir.

Agar ikki pallali giperboloidni $y=h$ tenglama bilan aniqlangan tekislik bilan kessak, har qanday h uchun kesimda

$$\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}=\frac{h^2}{b^2}+1$$

tenglama bilan aniqlanuvchi giperbola hosil bo'ladi.Bu giperbolaning yarim o'qlari mos ravishda

$$c\sqrt{1+\frac{h^2}{b^2}} \quad , \qquad a\sqrt{1+\frac{h^2}{b^2}}$$

kattaliklarga tengdir.

Xuddi shunday ikki pallali giperboloidni $x = h$ tenglama bilan aniqlangan tekislik bilan kessak, har qanday h uchun kesimda

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{a^2} + 1$$

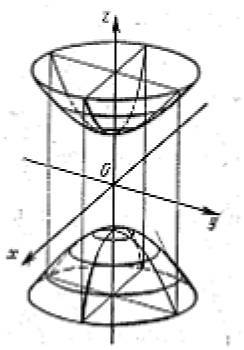
tenglama bilan aniqlanuvchi giperbola hosil bo'ladi. Bu giperbolaning

yarim o'qlari mos ravishda

$$c\sqrt{1+\frac{h^2}{a^2}} \quad , \qquad b\sqrt{1+\frac{h^2}{a^2}}$$

kattaliklarga tengdir.

Bundan tashqari (3) tenglamadan ko'rish mumkinki, giperboloid koordinata tekisliklariga nisbatan simmetrik joylashgan,koordinata boshi esa uning simmetriya markazi bo'ladi.Bularni hisobga olib uni chizmada tasvirlashimiz mumkin.



Chizma-2. Ikki pallali giperboloid

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2}{c^2}+1$$

tenglama bilan aniqlanuvchi ellips hosil bo'ladi.Bu ellipsning

yarim o'qlari mos ravishda

$$a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}\quad , \qquad b\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}$$

Ta'rif-3. Ikkinchi tartibli sirt tenglamasini birorta dekart koordinatalari sistemasida

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (4)$$

ko'rinishda yozish mumkin bo'lsa , u bir pallali giperboloid deb ataladi.Bu tenglamada $a \geq b > 0$, $c > 0$ munosabatlar bajarilishi talab qilinadi.

Bir pallali giperboloidning tenglamasidan ko'rish mumkinki, u koordinata tekisliklariga nisbatan simmetrik joylashgan,koordinata boshi esa uning simmetriya markazi bo'ladi. Bir pallali giperboloidni $z = h$ tenglama bilan aniqlangan tekislik bilan kessak, har qanday h uchun kesimda

kattaliklarga tengdir.Agar $h=0$ bo'lsa,kesimda eng kichkina ellips hosil bo'ladi.Bu ellips bir pallali giperboloidning bo'g'zi deb ataladi.

Bir pallali giperboloidni $x = h$, $y = h$ tenglama bilan aniqlangan tekisliklar bilan kessak, mos ravishda $|h| < a$ va $|h| < b$ bo'lganda kesimda

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{h^2}{a^2} \qquad \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{h^2}{b^2}$$

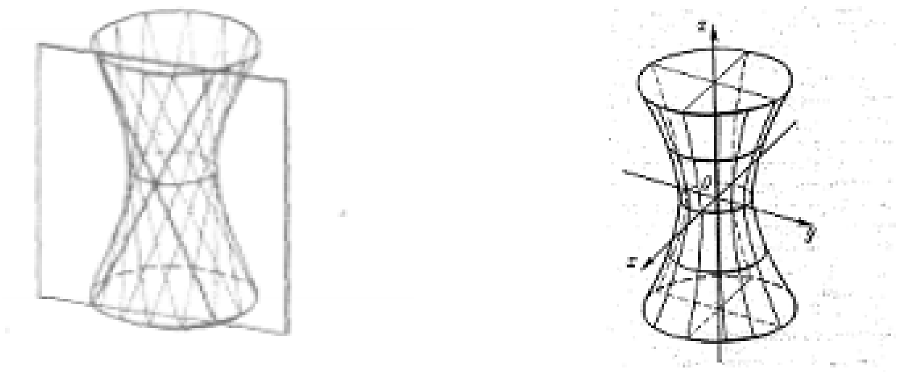
tenglamalar bilan aniqlanuvchi giperbolalar hosil bo'ladi.Bu giperbolalardan birinchisining yarim o'qlari mos ravishda

$$a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}\ , \qquad b\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}$$

kattaliklarga tengdir. Agar $|h| = a$ *yoki* $|h| = b$ *bo'lsa,kesimda mos ravishda*

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \ \ va \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

tenglamalar bilan aniqlanuvchi ikkita kesishuvchi to'g'ri chiziqlar hosil bo'ladi.Bu faktlarni hisobga olib bir pallali giperboloidni chizmada tasvirlashimiz mumkin



Chizma-3

Ta'rif-4. Sirtning xar bir nuqtasidan shu sirtda yotuvchi to'g'ri chiziq o'tsa, bunday sirt chiziqli sirt deyiladi.

Sirt chegaralagan bo'lsa,unda to'g'ri chiziq yotmaydi va shuning uchun u chiziqli sirt bo'lmaydi.Demak ellipsoid chiziqli sirt bo'lmaydi.

Teorema-1. Bir pallali giperboloid chiziqli sirt bo'lib, uning har bir nuqtasidan giperboloidda yotuvchi ikkita to'g'ri chiziq o'tadi.

Isbot. *Bir pallali giperboloidning* $M(x_0, y_0, z_0)$ *nuqtasidan* $\{l, m, n\}$ *yo'nalishdagi to'g'ri chiziqning parametrik tenglamalari*

$$\begin{aligned} x &= x_0 + lt \\ y &= y_0 + mt \\ z &= z_0 + nt \end{aligned} \qquad (5)$$

ko'rinishda bo'ladi.Bu to'g'ri chiziq bir pallali giperboloidda yotishi uchun

$$\frac{(x_0 + lt)^2}{a^2} + \frac{(y_0 + mt)^2}{b^2} - \frac{(z_0 + nt)^2}{c^2} = 1$$

tenglik t ning har qiymatida bajarilishi kerak.Bu tenglikda

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - \frac{z_0^2}{c^2} = 1$$

munosabatni hisobga olsak

$$\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} - \frac{n^2}{c^2} = 0 \text{ va } \quad \frac{lx_0}{a^2} + \frac{my_0}{b^2} - \frac{nz_0}{c^2} = 0$$

tengliklarni hosil qilamiz. Yo'nalishni aniqlovchi $\{l, m, n\}$ vektorning hamma koordinatalari nolga teng bo'lmaganlini uchun yuqordagi tenglikning birinchisidan $n \neq 0$ ekanligi kelib chiqadi.Biz umumiylikni chegaralamasdan $n = c$ deb olamiz.Bundan esa l, m lar uchun

$$\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} = 1, \qquad \frac{lx_0}{a^2} + \frac{my_0}{b^2} = \frac{z_0}{c}$$

shartlarni olamiz.Agar biz

$$x_0 = x_1 + l\frac{z_0}{c}\ ,\ y_0 = y_1 + m\frac{z_0}{c} \qquad (6)$$

tengliklar bilan $(x_1, y_1, 0)$ nuqtani aniqlasak

$$\frac{lx_1}{a^2} + \frac{my_1}{b^2} = 0 \qquad (7)$$

tenglikni olamiz.Bundan tashqari

$$\frac{\left(x_1 + l\frac{z_0}{c}\right)^2}{a^2} + \frac{\left(y_1 + m\frac{z_0}{c}t\right)^2}{b^2} - \frac{z_0^2}{c^2} = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} +$$
$$+ 2\left(\frac{lx_1}{a^2} + \frac{my_1}{b^2}\right)\frac{z_0}{c} + \left(\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} - 1\right)\frac{z_0^2}{c^2} = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2}$$

tenglikdan

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1 \qquad (8)$$

munosabat kelib chiqadi.Demak$(x_1, y_1, 0)$ *nuqta giperboloidning bo'g'ziga tegishlidir.Yuqoridagi (6) tenglikdan*

$$\frac{l}{m} = \frac{-a^2 y_1}{b^2 x_1}$$