17 – mavzu: Giperbola ta’rifi. Kanonik tenglamasi, xossalari. Giperbola asimptotalari.

Reja:

1. Giperbola ta’rifi, kanonik tenglamasi
2. Giperbolaning xossalalari
3. Giperbolaning ekstsentrisiteti, asimptotalari va direktrisalari.
4. Giperbola urinmasi.

Giperbola ta’rifi, kanonik tenglamasi.

Ta’rif. Tekislikda har bir nuqtasidan ***fokuslar*** deb ataluvchi F_l va F_2 nuqtalargacha bo`lgan masofalar ayirmasining absolyut qiymati berilgan kesma uzunligiga teng bo`lgan nuqtalarning geometrik o`rniga ***giperbola*** deb ataladi. Berilgan kesma uzunligi fokuslar orasidagi masofadan kichik.

Ta’rifda aytilgan kesma uzunligini $2a$ fokuslari orasidagi masofani fokal masofa deb $2c$ bilan belgilaymiz, ta’rifga ko`ra

$$2a<2c \Rightarrow a<c \qquad (45.1)$$

$a>0$, $c>0$, F_l va F_z nuqtalar ustma-ust tushmaydi deb faraz qilamiz.

Giperbolaning M nuqtasidan fokuslarigacha bo`lgan masofalarni $g_1=F_1M$, $g_2=F_2M$ larni M nuqtaning fokal radiusi deyiladi.

Giperbolaning ta’rifiga ko`ra giperbola tenglamasi

$$|F_1M-F_2M|=2a$$

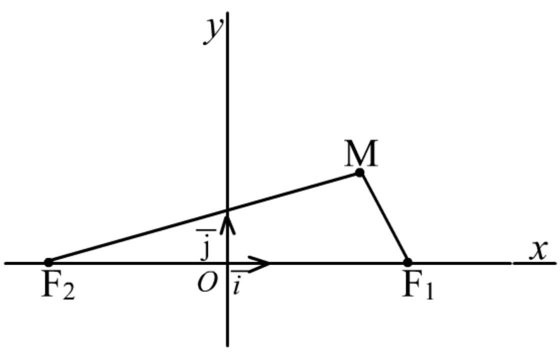
yoki

$$|g_1-g_2|=2a \qquad (45.2)$$

Giperbola to`g’ri burchakli dekart koordinatalar sistemasidagi tenglamasini chiqarish uchun, koordinatalar sistemasini ellips bilan ish ko`rgandek qilib tanlaymiz.

$F_1F_2=2c$ bo`lgani uchun olingan koordinatalar sistemasida $F_1(c,0)$, $F_2(-c,0)$, $M(x,y)$ kordinatalarga ega bo`ladi (90-chizma).

U holda $r_1=F_1M=$



90-chizma

$\sqrt{(x-c)^2+y^2}$, $r_2=F_2M=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$ (45.3)

Giperbola ta’rifiga ko`ra ya’ni (45.2) formaulaga asosan

$\left|\sqrt{(x-c)^2+y^2}-\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right|=2a$ **ni hosil qilamiz**

bu tenglamani quyidagicha yozib olamiz

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\sqrt{(x+c)^2+y^2}\pm 2a$$

bu tenglamani kvadratga oshirib quyidagiga ega bo`lamiz

$$\pm a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-cx$$

yana kvadratga oshirib ba’zi bir almashtirishlarni bajarib, quyidagilarni yozamiz

$$(c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2) \qquad (45.4)$$

$$b^2=c^2-a^2>0 \qquad (45.5)$$

belgilab, bu belgilanishlarni e’tiborga olsak

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (45.6)$$

ega bo`lamiz.

Shunday qilib, giperbola ixtiyoriy nuqtasining koordinatalari (45.6) tenglamani qanoatalntiradi.

Endi teskari jumlani isbotlaylik. Ya’ni koordinatalari (45.6) tenglamani qanoatlantiruvchi nuqta giperbolada yotishini isbotlaylik.

(45.3) formuladagi y^2 ning qiymatini (45.6) formuladan topib qo`yamiz va (45.5) ni e’tiborga olsak ushbu tengliklarga ega bo`lamiz

$g_1=\left|\frac{c}{a}x-a\right|$ $g_2=\left|\frac{c}{a}x+a\right|$

(16.6) dan $|x|\geq a$. Bundan tashqari $c>a$, $\frac{c}{a}>1$, u holda $x>0$ bo’lganda

$\frac{c}{a}x-a>0,$ $\frac{c}{a}x+a>0,$ bo’lib,

$$g_1=\frac{c}{a}x-a, \quad g_2=\frac{c}{a}x+a, \qquad (45.7)$$

$x<0$ bo’lganda $a-\frac{c}{a}x>0,$ $-\left(\frac{c}{a}x+a\right)>0$ bo’lib,

$$g_1 = a - \frac{c}{a}x, \quad g_2 = -\left(\frac{c}{a}x + a\right) \quad (45.8)$$

o'rinli bo'ladi.

Demak, $|g_1 - g_2| = 2a$ ya'ni M nuqta giperbolada yotadi. Shunday qilib, (45.6) tenglama giperbolaning sodda tenglamasi yoki giperbolaning kanonik tenglamasi deyiladi.

Endi giperbolaning 2-usulda aniqlanishini ko'rib chiqamiz:

Giperbola ta'rifi, kanonik tenglamasi.

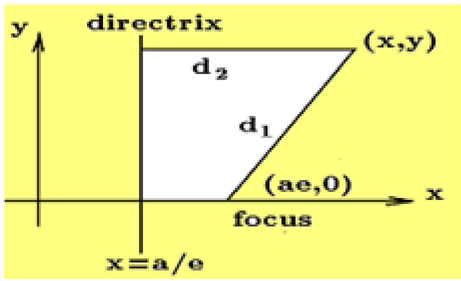
Giperbolaning ekstsentrisitetini e harf bilan belgilaymiz. Giperbolaning fokus nuqtasi deb $(ae, 0)$ nuqtani, uning direktrisasi deb $x = \frac{a}{e}$ chiziqni tanlab olsak, u holda tanlangan nuqta, tanlangan to'g'ri chiziq va umimiy nuqta (x, y) uchun quydagi tenglik o'rinli.

$$\sqrt{(x - ae)^2 + y^2} = e|x - a/e|$$

tenglikni elementar almashtirishlar yordamida

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2(e^2 - 1)} = 1$$

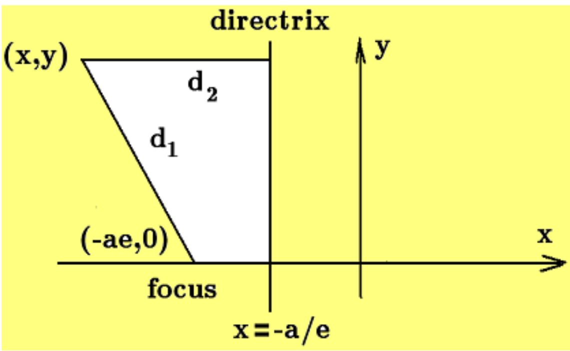
tenglikka ega bo'lamiz.



$$H_1 = \{\,(x, y) \mid \sqrt{(x - ae)^2 + y^2} = e|x - a/e|,\ e > 1\,\}$$

Giperbolaning fokus nuqtasi deb $(-ae, 0)$ nuqtani, uning direktrisasi deb $x = -\frac{a}{e}$ chiziqni tanlab olsak, u holda tanlangan nuqta, tanlangan to'g'ri chiziq va umimiy nuqta (x, y) uchun quydagi tenglik o'rinli.

$$H_2 = \{\,(x, y) \mid \sqrt{(x + ae)^2 + y^2} = e|x + a/e|,\ e > 1\,\}$$



$$\sqrt{(x+ae)^2+y^2} = e|x+a/e|$$

tenglikni soddalashtirishda $c = ae$ and $b^2 = a^2(e^2-1) = c^2 - a^2 > 0$ belgalashni hisobga olsak, u holda

$$\sqrt{(x+ae)^2+y^2} = e|x+a/e|$$

tenglikni

$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ ko'rinishdagi tenglikka olib kelish mumkin. Shunday qilib giperbolning fokuslari $(-ae,0)$ va $(ae,0)$ nuqtalar uning direktrissalari esa $\begin{matrix} d_1: & x - \dfrac{a}{e} = 0 \\ d_2: & x + \dfrac{a}{e} = 0 \end{matrix}$ to'g'ri chiziqlardir.[1]

Giperbolaning xossalalari

Giperbolaning geometrik xossalarini o`rganish va uni yasash uchun (45.6) tenglamadan foydalanamiz. Ellips tenglamasi ustida olib borgan muhokamalarni takrorlab giperbolaning koordinatalar boshi, koordinatalar o`qlariga nisbatan simmetrikligini aniqlanadi.

Giperbola Ox o`qi bilan $A_1(a,0)$, $A_2(-a,0)$ nuqtalarda kesishadi. (45.6) tenglama bilan aniqlangan giperbola $Oy$ o`qi bilan kesishmaydi. Giperbola Oy o`qi bilan $B_1(0,b)$, $B_2(0,-b)$ mavxum nuqtalarda kesishadi deb kelishib olamiz.

A_1, A_2 nuqtalar giperbola uchlari deyiladi. Giperbolaning uchlari orasidagi masofa giperbolaning haqiqiy o`qi deyiladi.

B_1, B_2 nuqtalarni giperbolaning mavhum uchlari deyiladi. $B_1B_2=2b$ kesmani giperbolaning mavhum o`qi deyiladi. $a$ va $b$ larni mos ravishda haqiqiy va mavhum yarim o`qlar deyiladi.

Agar $N(x,y)$ nuqta giperbolada yotsa, (45.6) tenglamadan: $/x/\geq a$. demak $x=\pm a$ to`g'ri chiziqlar bilan chegaralangan tasmada (polosa) da giperbolaning birorta ham nuqtasi yo`q (86-chizma).

Giperbola tenglamasini y ga nisbatan echaylik

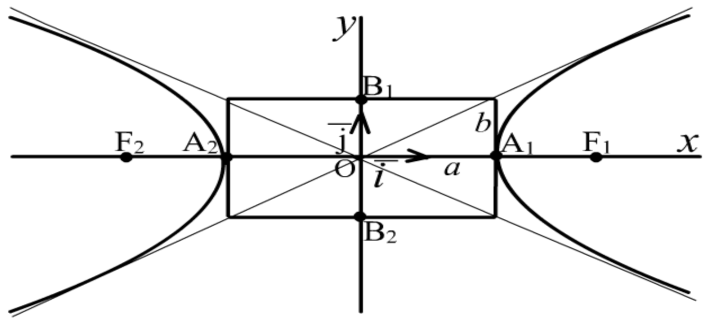
$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2} \qquad (46.1)$$

[1] Introduction to Calculus, Volume I, by J.H. Heinbockel Emeritus Professor of Mathematics Old Dominion University p.p 60-68, mazmun – mohiyatidan foydalanildi

bu tenlamaga e'tibor bersak x o`zgaruvchi $a$ dan $+\infty$ gacha o`sib borganda va $-a$ dan $-\infty$ gacha kamayganda, y miqdor $-\infty<y<+\infty$ oraliqda o`zgaradi. Demak, giperbola ikki qismdan iborat bo`lib, 91-chizmada tasvirlangan.

Ularni giperbolaning tarmoqlari deyiladi.

Giperbolaning o`ng tarmog'i $x \geq a$ yarim tekislikda, chap yarim tarmogi $x < -a$ yarim tekislikda yotadi.



91-chizma

Giperbolaning ekstsentrisiteti, asimptotalari va direktrisalari.

Giperbolaning shaklini aniq tasvirlash uchun yassi chiziqning asimptotasi tushunchasini kiritamiz. Bizga λ chiziqni kesmaydigan d to`gri chiziq berilgan bo`lsin.

Ta'rif. Agar $N \in \lambda$ nuqta shu λ chiziq bo`yicha harakat qilganda uning $d$ to`g'ri chiziqqacha bo`lgan masofasi nolga intilsa, to`g'ri chiziq λ chizining asimptotasi deyiladi.

Giperbola markazidan o`tuvchi $d$ to`g'ri chiziq

$$x=a_1 t$$
$$y=a_2 t \qquad (47.1)$$

parametrik tenglamasi bilan berilgan. (45.6) va (47.1) tenglamalarni sistema qilib echamiz

$$\left(\frac{a_1^{\ 2}}{a^2}-\frac{a_2^2}{b^2}\right)t^2=1 \qquad (47.2)$$

1) agar $\frac{a_1^2}{a^2}-\frac{a_2^2}{b^2}>0$ bo`lsa, (47.2) tenglama $t_{1,2}=\pm\frac{ab}{\sqrt{a_1^2b^2-a_2^2a^2}}$

demak , d **to`g'ri** chiziq giperbola bilan ikkita $N_1(a_1t,\ a_2t)$ va $N_2(a_1t_2,\ -a_2t_2)$ nuqtalarda kesishadi.

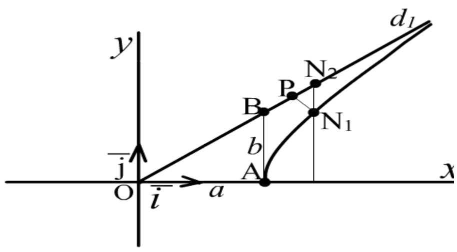
2. Agar $\frac{a_1^2}{a^2}-\frac{a_2^2}{b^2}$<0 bo`lsa, u holda *d* to`g’ri chiziq giperbolani kesmaydi.

Xususan, $\frac{a_1^2}{a^2}-\frac{a_2^2}{b^2}=0$, u holda $\frac{a_2}{a_1}=\pm\frac{b}{a}$. d_1: $y=\frac{b}{a}x$, d_2: $y=-\frac{b}{a}x$ tenglama bilan aniqlangan d_1, d_2 to`g’ri chiziqlar giperbola assimptotalari deyiladi.

Giperbola koordinatalar o`qlariga nisbatan simmetrik bo`lgani uchun uning birinchi choragidagi qismini olamiz.

Agar $x>0$ bo`lsa, giperbolaning birinchi chorakdagi qismini aniqlaydi

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$$



Giperbolaga tegishli $N_1(x_1,y_1)$ nuqtani va d_1 to`g’ri chiziqqa tegishli $N_2(x_2,y_2)$ nuqtani olaylik.

$$\left(y_1=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2},\ y_2=\frac{b}{a}x\right)\Rightarrow y_2>y_1$$

Demak, giperbola uning asimptotalar hosil qilgan vertikal burchaklardan fokuslarini o`z ichiga oluvchi sohada yotadi (92-chizma).

Endi ordinatalarning farqiga e’tibor beraylik.

$$y_2-y_1=\frac{b}{a}\left(x-\sqrt{x^2-a^2}\right)=\frac{ab}{x+\sqrt{x^2-a^2}}$$

Agar $N\in g$ nuqtaning absissasi $x>0$ cheksiz ortib borsa, y_2-y_1 ayirma monoton kamayib nolga intiladi va N nuqta giperbolani A_1 uchidan chiqib assimptotaga cheksiz yaqinlashib boradi.

Giperbola tasviri 92-chizmada berilgan.

Agar giperbolaning yarim o`qlari teng bo`lsa, bunday giperbolani teng tomonli deyiladi. Teng tomonli giperbolaning assimptotalari perpendikulyar bo`ladi. Teng tomonli giperbolaning kanonik tenglamasi

$$x^2-y^2=a^2$$

ko`rinishda yoziladi.

Ushbu

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (47.3)$$

tenglama fokal o`qi Oy da yotuvchi giperbolaning kanonik tenglamasi deb aytiladi.

Ayni bir koordinatalar sistemasida *a* va *b* larning ayni bir qiymatida

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\quad -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

tenglamalar bilan aniqlangan ikki giperbola o`zaro **qo`shma giperbola** deb aytiladi.

Ta'rif. Giperbolaning fokuslari orasidagi masofani haqiqiy o`q uzunligiga nisbati giperbolaning **ekstsentrisiteti** deyiladi.

$e=\frac{2c}{2a}=\frac{c}{a}$ bunda $c>a \Rightarrow e>1.$

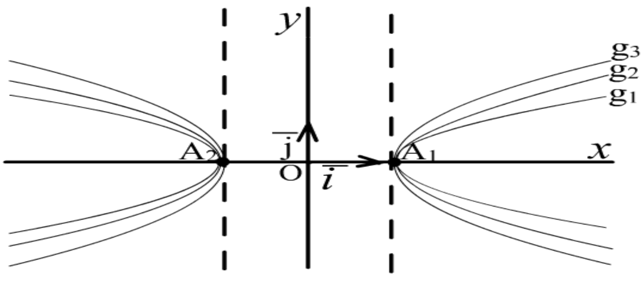
45-§, (45.7) va (45.8) larni e'tiborga olsak giperbolaning fokal radiuslarini quyidagicha

$x>0$ bo'lganda $g_1=ex-a, g_2=ex+a$ (47.4)

$x<0$ bo'lganda $g_1=a-ex, g_2=-a-ex$ (47.5)

yozish mumkin.

Ekstsentrisitet giperbolaning shaklini aniqlashda muhim ahamiyatga ega. haqiqatan ham $e=\frac{c}{a}$ dan $c=ea$, $b^2=c^2-a^2$ ga qo`ysak $b^2=a^2(e^2-1)$ yoki $\frac{b}{a}=\sqrt{e^2-1}$ bo`lib, bunga asosan, ekstsentrisitet qanchalik kichik, ya'ni $e\to 1$ bo`lsa, $\frac{b}{a}$ shunchalik kichik bo`ladi, ya'ni $\frac{b}{a}\to 0$ bo`ladi (bu yerda $a$-const deb faraz qilinadi). Giperbola o`zining haqiqiy o`qiga siqilgan bo`ladi. Aksincha, e kattalashib borsa $\frac{b}{a}$ ham kattalashib giperbola tarmoqlariga kengayib boradi.



93-chizma

93-chizmada g_1, g_2, g_3 giperbolalar tasvirlangan bo`lib, ularning $e_1$, $e_2$, $e_3$ ekstsentrisitetlari uchun $e_1<e_2<e_3$ tengsizliklar o`rinli.

Giperbolaning direktrisalari.

Giperbola o'zining

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>b) \tag{47.6}$$

kanonik tenglamalari bilan berilgan bo'lsin.

Ta'rif: Giperbolaning berilgan F fokusga mos direktrisasi deb, uning fokal o'qiga perpendikulyar va markazdan shu F fokus yotgan tomonda $\frac{a}{e}$ masofada turuvchi to'g'ri chiziqqa aytiladi.

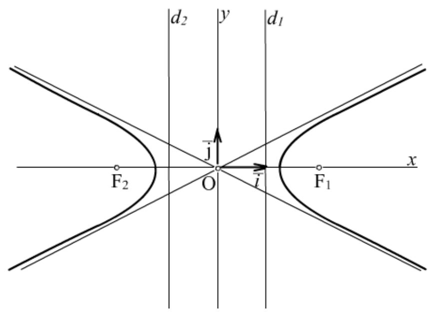
$F_1(c,0)$ va $F_2(-c,0)$ fokuslarga mos direktrisalarni d_1 va d_2 deb belgilasak, u holda bu direktrisalarning tenglamalari

$$d_1: \quad x-\frac{a}{e}=0$$

$$d_2: \quad x+\frac{a}{e}=0$$

(47.7)

ko'rinishda bo'ladi.



94-chizma

$d_1 \cap (Ox)=D_1$, $d_2 \cap (Ox)=D_2$ deb olsak, Giperbola uchun $e>1$ bo'lgani uchun $\rho(0,D_1)=\rho(0,D_2)=\frac{a}{e}<a$ bo'ladi.

Demak, D_1 nuqta O nuqta bilan A_1 nuqta orasida, D_2 nuqta esa O nuqta bilan A_2 nuqta orasida yotadi (94-chizma).

Demak giperbolaning direktrisalari uni kesmaydi.

Agar (a berilgan holda) giperbolaning $e=\frac{c}{a}$ ekssentrisiteti kamaysa, u holda giperbola direktrisasi ikkinchi o'qdan uzoqlashib boradi.

Giperbola urinmasi.

Giperbolaning ixtiyoriy $N_0(x_0,y_0)$ nuqtasiga o`tkazilgan urinmasining tenglamasini tuzamiz.

Giperbolaning M_0 nuqtasi orqali o`tuvchi $d$ to`g'ri chiziq o`zining parametrik

$$X=x_0+\alpha t,$$

$$Y=y_0+\beta t \qquad (48.1)$$

tenglamasi bilan berilgan bo`lsin.

Bu to`g'ri chiziqning giperbola bilan kesishish parametrini topaylik. Buning uchun (48.1) dan $x$ va $y$ larning qiymatlarini giperbola tenglamasiga qo`yib, (ellips uchun qilingan ishlarni e'tiborga olib) ushbu tenglikka ega bo`lamiz

$$\left(\frac{2\alpha x_0}{a^2}-\frac{2\beta y_0}{b^2}\right)t+\left(\frac{\alpha^2}{a^2}-\frac{\beta^2}{b^2}\right)t^2=0$$

ellips singari bu yerda ham, to`g'ri chiziq giperbolaga urinma bo`lishi uchun

$$\frac{\alpha x_0}{a^2}-\frac{\beta y_0}{b^2}=0 \qquad \text{yoki} \qquad \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \frac{y_0}{b^2} & \frac{x_0}{a^2} \end{vmatrix}=0$$

shartning bajarilishi zarur va yetarlidir.

Shunday qilib, urinma $\left(\frac{y_0}{b^2},\frac{x_0}{a^2}\right)$ vektorga parallel va $\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 \\ \frac{y_0}{b^2} & \frac{x_0}{a^2} \end{vmatrix}=0$

tenglamaga ega bo`ladi. Bu tenglikda ba'zi bir elementar almashtirishlarni bajarib

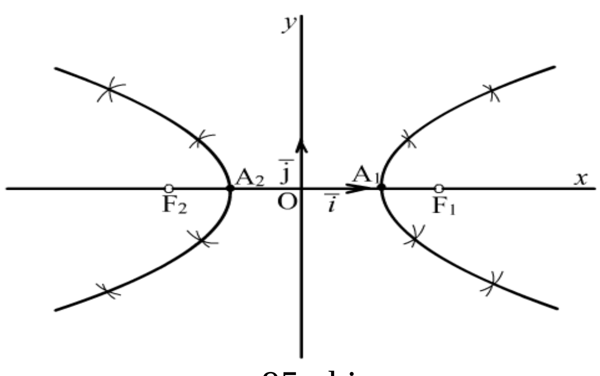
$$\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}=1 \qquad (48.2)$$

urinma tenglamasiga ega bo`lamiz.

Giperbolani yasash.

Agar giperbola fokuslari F_1 va F_2 lar va haqiqiy A_1A_2 o`qlari berilsa, giperbolani qanday yasash mumkin ekanligini ko`raylik (95-chizma).

F_1 nuqtani markaz qilib ixtiyoriy radius bilan $S_1(F_1, t)$ aylana chizamiz. F_2 nuqtani markaz qilib $t+A_1A_2$ kesmani radius qilib $S_2(F_2,t+ A_1A_2)$ aylana



95-chizma

chizamiz. Bu aylanalarning kesishgan nuqtalarini giperbolada yotadi. Bu usulni bir nechta marta takrorlab, giperbolaga qarashli ko`plab nuqtalarni topamiz. Topilgan nuqtalarni birlashtirsa, giperbola bitta tarmog'ini hosil qilamiz.

$S_3(F_2, t)$ va aylana $S_4(F_1, A_1A_2)$ larning kesishgan nuqtalarini topib giperbolani ikkinchi tarmog'ini yasaymiz.