16 – mavzu: Ellips ta’rifi. Kanonik tenglamasi, xossalari.

Reja:

1. Tekislikda ikkinchi tartibli chiziqlar. Aylananing umumiy tenglamasi
2. Ellips ta’rifi.
3. Kanonik tenglamasi, xossalari.
4. Ellipsning ekstsentrisiteti va direktrisalari.

Aylananing umumiy tenglamasi.

Aylana maktab geometriya kursidagi ko`plab masalalarni yechishda muhim ahamiyat kasb etadi. Shuning uchun qaralayotgan paragrafda aylananing analitik ifodasini berib, masalalar yechishga tadbiq qilamiz.

Ta‘rif. Tekislikda berilgan nuqtadan berilgan masofada yotuvchi nuqtalarning (to`plamini ) geometrik o`rnini aylana deyiladi.

Ta’rifda aytilgan nuqtani aylana markazi, berilgan masofani aylana radiusi deyiladi va r bilan belgilaymiz.

To`g’ri burchakli dekart koordinatalar sistemasi $(O,\vec{i},\vec{j})$ berilgan bo`lsin. Tekislikdagi ixtiyoriy $N(x,y)$ nuqta aylanada yotishi uchun

$$|\overrightarrow{CN}|=r \qquad (39.1)$$

shart o`rinli bo`lishi lozim. Bu yerda $C(a,b)$ aylana markazi

(39.1) dan:

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r$$

bundan,

$$(x-a)^2+(y-b)^2-r^2=0 \qquad (39.2)$$

markazi $C(a,b)$ nuqtada radiusi r ga teng bo`lgan aylananing **u m u m i y t e n g l a m a s i** deyiladi.

Agar $a=b=0$ bo`lsa, C nuqta koordinatalar boshi bilan ustma-ust tushadi.

(39.2) tenglama,

$$x^2+y^2=r^2 \qquad (39.3)$$

ko`rinishda bo`ladi. Bu tenglama markazi koordinatalar boshida bo`lgan aylananing **n o r m a l t e n g l a m a s i** deyiladi.

(39.2) dan qavslarni ochib chiqsak, quyidagi hosil bo`ladi:

$$x^2+y^2-2ax-2by+(a^2+b^2-r^2)=0$$

$-2a=D$, $-2b=E$, $a^2+b^2-r^2=F$ bilan belgilasak aylana tenglamasi

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0 \qquad (39.4)$$

ko`rinishga keladi. (39.4) tenglamaga e'tibor bersak, ikkinchi tartibli algebraik chiziq aylana tenglamasi bo`lishi uchun: a) o`zgaruvchi koordinatalar ko`paytmasi xy qatnashmasligi, b) x^2 va y^2 oldidagi koeffitsentlar o'zaro teng bo`lishi kerak, degan xulosaga kelamiz.

Ellips ta'rifi, kanonik tenglamasi.

T a ' r i f. Ellips deb tekislikdagi shunday nuqtalarning geometrik o`rniga aytiladiki, bu nuqtalarning har biridan fokuslar deb ataluvchi $F_1$ va $F_2$ nuqtalargacha bo`lgan masofalari yig'indisi berilgan PQ kesma uzunligiga teng bo'ladi. Bu yerda $PQ > F_1F_2$.

Fokuslar orasidagi masofani $F_1F_2=2c$, $PQ=2a$ deb olamiz.

Ta'rifga asosan $a>c$ bo`ladi.

Agar F_1 va F_2 nuqtalar ustma-ust tushsa, u holda ta'rifga ko`ra ellips radiusi $a$ ga teng aylana bo`ladi. Bu holda ellipsning fokuslari aylana markazi bilan ustma-ust tushadi. Shunday qilib, aylana ellipsning xususiy holidir.

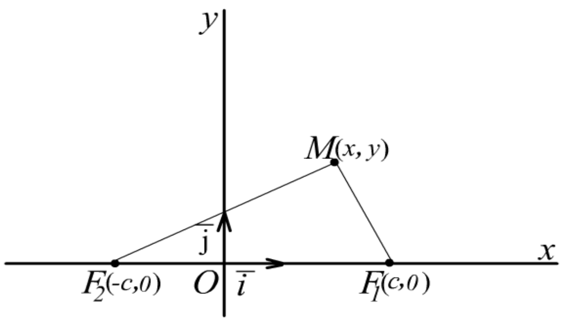
Ellipsning F_1, F_2 fokuslari orasidagi masofani ellipsning **fokal masofasi** deyiladi. M nuqta ellips nuqtasi bo`lsin, u holda F_1M va F_2M kesmalarni M nuqtaning **fokal radiuslari** deyiladi. Fokal radiuslarni $r_1=F_1M$, $r_2=F_2M$ bilan belgilaymiz (79-chizma).

Ixtiyoriy M nuqta ellipsda yotsa, ta'rifga ko`ra

$$F_1M+ F_2M = 2a,$$

yoki

$$r_1+r_2=2a \qquad (40.1)$$



79-chizma

(40.1) ellipsning ta'rifidan bevosita kelib chiqqan tenglamasidir.

Ellipsning to`g’ri burchakli dekart koordinatalar sistemasidagi tenglamasini topaylik.

Buning uchun dekart koordinatalar sistemasini quyidagicha tanlab olamiz. F_1F_2 to’g’ri chiziq bilan Ox absissa o`qi ustma-ust tushsin. $F_1F_2$ – kesmani o`rtasi O nuqta bo`lsin.

U holda fokuslar $F_1(c,0)$ va $F_2(-c,0)$ koordinatalarga $M(x,y)$ koordinatalarga ega bo`ladi. Tekislikdagi ixtiyoriy M nuqtaning fokal radiuslari quyidagilarga teng:

$$r_1=F_1M=\sqrt{(x-c)^2+y^2},\ r_2=F_2M=\sqrt{(x+c)^2+y^2} \qquad (40.2)$$

Topilgan qiymatlarni (40.1) tenglikka qo`yib

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a$$

ni hosil qilamiz. Bu tenglamani

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

ko`rinishda yozib olib, tenglikni ikkala tomonini kvadratga ko`tarib, ixchamlab quyidagini hosil qilamiz,

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-cx,$$

Yana kvadratga ko`tarib ixchamlasak

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2) \qquad (40.3)$$

$a>c \Rightarrow a^2>c^2$, demak $a^2-c^2>0$ bu sonni

$$b^2=a^2-c^2 \qquad (40.4)$$

kabi belgilab olsak (40.3) tenglama

$$b^2x^2+ay^2=a^2b^2 \qquad (40.5)$$

ko`rinishga keladi. (40.5) ni $a^2b^2$ ga bo`lib ushbu tenglamaga ega bo`lamiz:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (40.6)$$

Shunday qilib, γ ellipsning ixtiyoriy nuqtasining koordinatalari (40.6) tenglamani qanoatlantirishi isbotlandi.

Endi teskari jumlani isbotlaylik. Koordinatalari (40.6) tenglamani qanoatlantiruvchi ixtiyoriy M nuqtani ellipsda yotishini isbotlaymiz.

(40.6) tenglikdan $y^2 = b^2(1 - \frac{x^2}{a^2})$ qiymatini (40.2) ga qo`yib, (40.4) ni hisobga olsak, ushbuga ega bo`lamiz:

$$r_1=F_1M=\sqrt{(a-\frac{c}{a}x)^2}=\left|a-\frac{c}{a}x\right|,$$

$$r_2=F_2M=\sqrt{(a+\frac{c}{a}x)^2}=\left|a+\frac{c}{a}x\right|.$$

(40.6) tenglamadan $|x|\leq a$, $a>c$ bo'lgani uchun $0<\frac{c}{a}<1$ bo`ladi, u holda $\frac{c}{a}|x|<a$ bundan esa $a-\frac{c}{a}x>0$, $a+\frac{c}{a}x>0$. Shuning uchun

$$r_1=F_1N=a-\frac{c}{a}x,\ r_2=F_2N=a+\frac{c}{a}x \qquad (40.7)$$

Demak, $r_1+r_2=2a$. Ya'ni koordinatalari (40.6) tenglamani qanoatlantiruvchi M nuqta ellipsda yotadi.

(40.6) tenglama ellipsning **kanonik tenglamasi** deyiladi.

Endi ellipsning 2-usulda aniqlanishini ko'rib chiqamiz:

Ellipsning ekstsentrisiti e 0 < e <1 va ixtiyoriy musbat a soni quyidagi

$$ae < \frac{a}{e},$$

tengsizlikni qanoatlantiradi.

Demak, agar ellipsning fokus nuqtasi deb $(ae,0)$ nuqtani, ellipsning direktrisasi deb $x=\frac{a}{e}$ chiziqni tanlab olsak, u holda tanlangan nuqta, tanlangan to'g'ri chiziq va umimiy nuqta (x,y) uchun quydagi tenglik o'rinli.

Yuqoridagilardan shuni aytish mumkinki, ellips quydagi tenglikni qanoatlantiruvchi (x,y) nuqtalarga aytiladi:

$$E_1 = \{\,(x,y)\ |\ \sqrt{(x-ae)^2+y^2} = e|x-a/e|,\ 0<e<1\,\}$$

$$\sqrt{(x-ae)^2+y^2} = e|x-a/e|$$

tenglikdan shakl almashtirish yordamida quyidagi tengkliklarga ega bo'lamiz:

$$(x-ae)^2+y^2=e^2(x-a/e)^2$$

yoki
$$x^2-2aex+a^2e^2+y^2=e^2x^2-2aex+a^2$$

Bundan esa

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2(1-e^2)}=1$$

yoki $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad b^2=a^2(1-e^2)$

tengliklarga ega bo'lamiz.

Agar ellipsning fokus nuqtasi deb $(-ae,0)$ nuqtani, ellipsning direktrisasi deb $x=-\frac{a}{e}$ chiziqni tanlab olsak, u holda tanlangan nuqta, tanlangan to'g'ri chiziq va umimiy nuqta (x,y) uchun quydagi tenglik o'rinli.[1]

Bu hol uchun quyidagi to'plamni qaraymiz.

$$E_2=\{\,(x,y)\mid \sqrt{(x+ae)^2+y^2}=e|x+a/e|,\ 0<e<1\,\}$$

E_2 to'plamdagi tenglikni shakl almashtirishlar yordamida quyidagi sodda

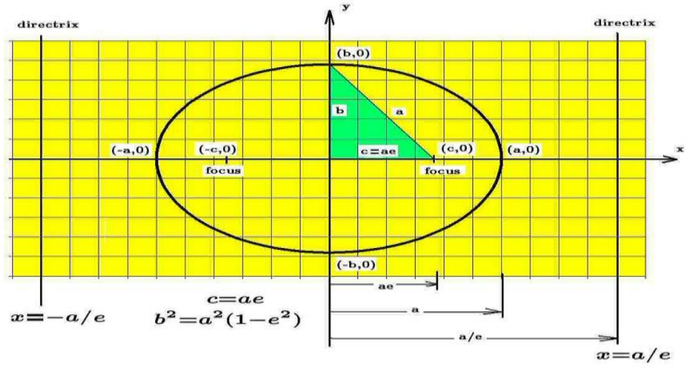


Figure 1-41. The ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

ko'rinishga keltirish mumkin.

Bunda va $c=ae$ $\quad b^2=a^2(1-e^2)=a^2-c^2$

Natijada

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad 0<e<1, \quad b^2=a^2(1-e^2), \quad c=ae$ tengliklarga ega bo'lamiz. Shunday qilib ellipsning fokusi $(ae,0)$, $(-ae,0)$ nuqtalar uning direktrissalari esa

[1] Introduction to Calculus, Volume I, by J.H. Heinbockel Emeritus Professor of Mathematics Old Dominion University p.p 60-68 mazmun – mohiyatidan foydalanildi

$$d_1: \quad x - \frac{a}{e} = 0$$

to’g’ri chiziqlardir. [2]

$$d_2: \quad x + \frac{a}{e} = 0$$

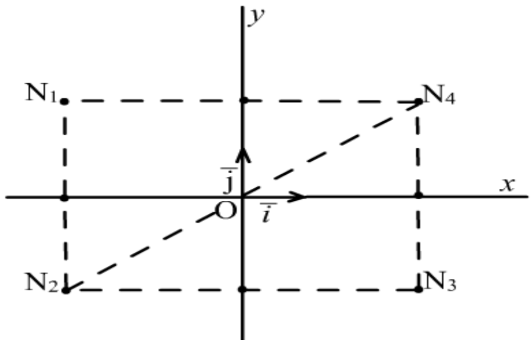
Ellipsning xossalari.

Bu yerda ellipsning xossalarini o`rganib, uning shaklini chizamiz.

1°. (40.6) tenglamadan ko’rinadiki, ellips ikkinchi tartibli chiziqdir.

2°. Agar $N(x,y)\in\gamma$ bo`lsa, u holda x,y koordinatalar (40.6) tenglamani qanoatlantiradi, shuning uchun $x^2\leq a^2$, $y^2\leq b^2$, demak

$$-a\leq x\leq a, \ -b\leq x\leq b$$



80-chizma

Ya’ni ellipsning hamma nuqtalari tomonlari $2a$ va $2b$ dan iborat bo`lgan $N_1N_2N_3N_4$ to`g’ri to’rtburchak ichida joylashgan (80-chizma).

3°. Agar $N(x,y)\in\gamma$ bo`lsa, u holda $N'(-x,-y)\in\gamma$, shuning uchun $O$ nuqta ellipsning yagona **simmetriya markazi** bo`ladi

Agar $N(x,y)\in\gamma$, u holda $N'(-x,y)$ va $N'(x,-y)$ nuqtalar ham ellipsda yotadi. Chunki ellips ikkinchi tartibli chiziq. Demak, Ox va Oy o`qlari ellipsning **simmetriya o`qlari** bo`ladi. Ellips aylanadan farqli o`laroq boshqa simmetriya o`qlarga ega emas.

4°. Ellipcning koordinata o`qlari bilan kesishgan nuqtalarini topaylik:

a) $y=0$, (40.6) $\Rightarrow$ $x^2=a^2$, $x=\pm a$ demak, tllips Ox o`qni $A_1(a;0)$ va $A_2(-a;0)$ nuqtalarda kesadi

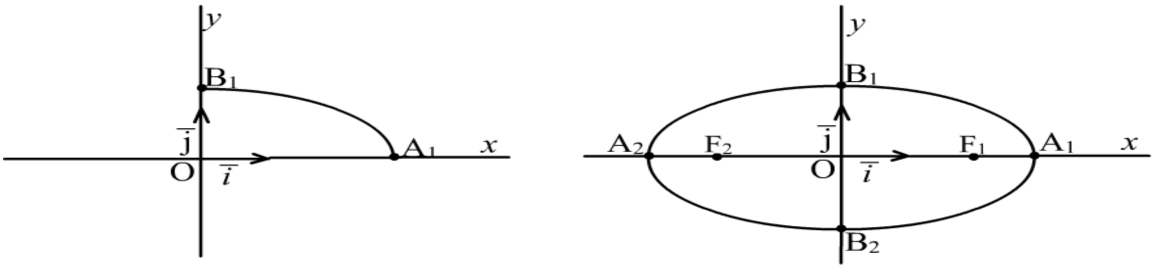
b) $x=0$, (40.6) $\Rightarrow$ $y^2=b^2$, $y=\pm b$. ellips Oy o’qni $B_1(0,b)$ va $B_2(0,-b)$ nuqtalarda kesadi. Bu nuqtalarni ellipsning **uchlari** deyiladi. A_1A_2 va B_1B_2 kesmalar mos ravishda ellipsning **katta va kichik o`qlari** deyiladi. Bu kesmalar $O$ nuqtada teng ikkiga bo`linadi. $OA_1=OA_2=a$, $OB_1=OB_2=b$ bu kesmalarni mos ravishda ellipsning **katta va kichik yarim o`qlari** deyiladi.

---

[2] Introduction to Calculus, Volume I, by J.H. Heinbockel Emeritus Professor of Mathematics Old Dominion University p.p 60-68 mazmun – mohiyatidan foydalanildi

Birinchi chorakda $N(x,y)$ nuqta uchun $x>0$, $y>0$: $y=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$. N nuqtaning absissasi x, 0 dan a gacha o`sganda, ordinatasi y, b dan 0 gacha kamayib boradi. Bu

ma’lumotlardan foydalanib ellipsning birinchi chorakdagi qismini 81.a- chizmada ko’rsatilgan B_1A_1 yoy deb tasavvur qilish mumkin. Ellipsning koordinata o’qlariga nisbatan simmetrikligidan foydalanib, uning birinchi chorakda hosil qilingan qismi bo’yicha shaklini 81.b- cizmadagidek tasavvur qilish mumkin.



81-chizma

Ellipsning ekstsentrisiteti va direktrisalari.

T a ‘ r i f. Ellipsning fokuslari orasidagi masofaning ellipsning katta o`qi uzunligiga nisbati shu ellipsning ekstsentrisiteti deb ataladi. Ekstsentrisitet e harfi bilan belgilanadi.

$$e=\frac{2c}{2a},\ e=\frac{c}{a} \qquad (42.1)$$

c-fokal masofa, a- katta yarim o`q.

Shuning uchun $0<e<1$ har bir ellipsning ekstsentrisitenti birdan kichik.

40-§, (40.7) tenglikni e’tiborga olsak, u holda ellipsning fokal radiuslarini ekstsentrisitent orqali

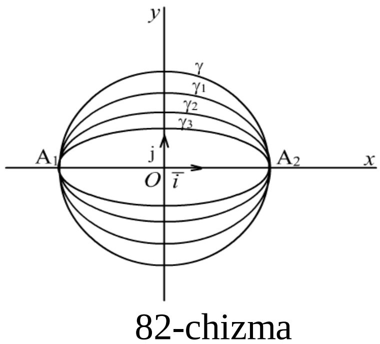
$$r_1=a-ex,\ r_2=a+ex \qquad (42.2)$$

ko’rinishda yozish mumkin.

Ekstsentrisitet nolga teng bo`lishi uchun $c=0$ bo`lishi zarur va yetarlidir.

Bunda ellips aylana bo`lib qoladi.

$c^2 = a^2 - b^2$ ekanligini e’tiborga olsak , u holda



82-chizma

$$e^2=\frac{c^2}{a^2}=\frac{a^2-b^2}{a^2}=1-\left(\frac{b}{a}\right)^2;$$

bundan

$$e=\sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2} \text{ va } \frac{b}{a}=\sqrt{1-e^2};$$

Demak, ekstsentrisitet ellipsning o`qlarining nisbati bilan aniqlanadi, o`qlarning nisbati esa, o`z navbatida ekstsentrisitet bilan aniqlanadi. Shunday qilib, **ekstsentrisitet ellipsning shaklini xarakterlaydi**. Ekstsentrisitet birga qancha yaqin bo`lsa, $1\text{-}e^2$ shunchalik kichik, ya'ni $\frac{b}{a}$ nisbat shunchalik kichik bo`ladi.

Demak, ekstsentrisitet qanchalik katta bo`lsa, ellips shunchalik cho`ziq bo`ladi.

Aylana bo`lgan holda $b=a$ va ektsentrisitetlari $e_1<e_2<e_3$. tensizlikni qanoatlantiruvchi ellipslar 82-chizmada tasvirlangan.

Ellipsning direktrisalari.

Ellips o'zining

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>b) \qquad (42.3)$$

kanonik tenglamasi bilan berilgan bo'lsin.

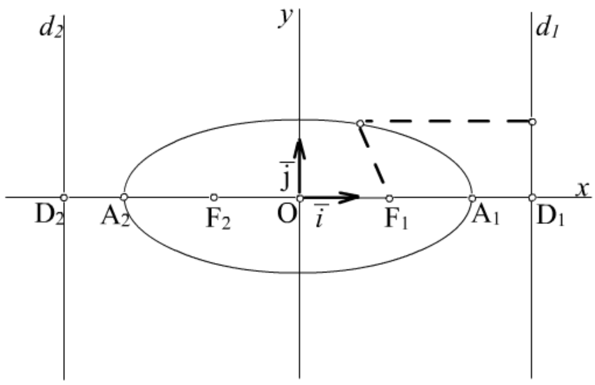
Ta'rif: Ellips ning berilgan F fokusga mos direktrisasi deb, uning fokal o'qiga perpendikulyar va markazdan shu F fokus yotgan tomonda $\frac{a}{e}$ masofada turuvchi to'q'ri chiziqqa aytiladi.

$F_1(c,0)$ va $F_2(-c,0)$ fokuslarga mos direktrisalarni d_1 va d_2 deb belgilasak, u holda bu direktrisalarning tenglamalari

$$\begin{aligned} d_1: \quad & x-\frac{a}{e}=0 \\ d_2: \quad & x+\frac{a}{e}=0 \end{aligned} \qquad (42.4)$$

ko'rinishda bo'ladi.

$d_1 \cap (Ox) = D_1$, $d_2 \cap (Ox) = D_2$ deb olsak, u holda ellips uchun $e < 1$ bo'lgani uchun, $\rho(0, D_1) = \rho(0, D_2) = \frac{a}{e} > a$ bo'ladi.



83-chizma

Demak, A_1 nuqta O nuqta bilan D_1 nuqta orasida, A_2 nuqta esa O nuqta bilan D_2 nuqta orasida yotadi (83-chizma).

Demak ellipsning direktrisalari uni kesmaydi.

Agar (a berilgan holda) ellipsning $e = \frac{c}{a}$ ekssentrisiteti kamaysa, u holda ellips direktrisasi ikkinchi o'qdan uzoqlashib boradi.

Aylana direktrisaga ega emas.

Ellipsni yasash. Ellipsning parametrik tenglamasi.

Kanonik tenglamasi bilan berilgan ellipsni sirkul va chizg'ich yordamida yasashniko`raylik. Buning uchun ellipsning $a>b$ yarim o`qlarini radius, koordinatalar boshinmarkaz qilib ikkita kontsentrik S_1 va S_2 aylanalar chizamiz (84.a-chizma).

O nuqta orqali ixtiyoriy d to`g'ri chiziq o`tkazamiz. Uning Ox o`qi bilan hosil qilgan burchagini $t$ bilan belgilaylik, $d$ to`g'ri chiziqning S_1 va S_2 aylanalar bilan kesishgan nuqtalarini mos ravishda $L(L_1)$ va $N(N_1)$ bilan belgilaylik, $L(L_1)$ nuqtadan Oy o`qqa, $N(N_1)$ nuqtadan $Ox$ o`qqa parallel to`g'ri chiziqlar o`tkazsak, ular $M(L_1)$ nuqtada kesishadi. Bu nuqtaning ellipsda yotishini isbotlaymiz.

$N(b\cos t, b\sin t)$, $L(a\cos t, a\sin t)$, $M(x,y)$

koordinatalarga ega. Bu nuqtalarning absissa va ordinatalariga e'tibor bersak

$$x = a\cos t$$
$$y = b\sin t \qquad (43.1)$$

ekanligini ko`ramiz. (43.1) tenglamani quyidagicha yoza olamiz.

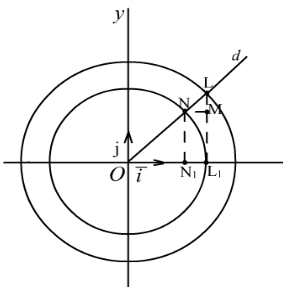
$$\frac{x}{a} = \cos t, \frac{y}{b} = \sin t$$

bu tenglikning har ikkala tomonini kvadratga ko`tarib qo`shsak, ushbu tenglamani hosil qilamiz

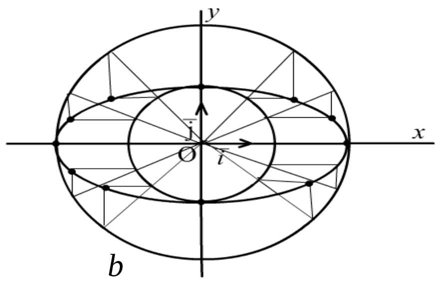
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (43.2)$$

Demak, M nuqta ellipsga tegishli ekan. 84.b-chizmada ellipsni yasash usuli ko`rsatilgan.

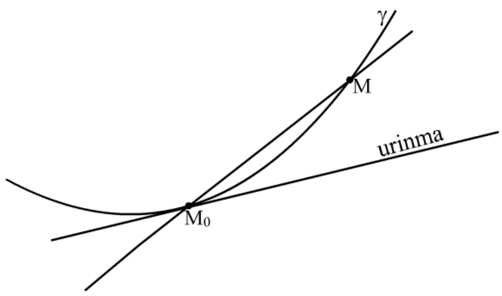
Ellipsning urinmasi



84-chizma



Ta'rif. γ chiziqning M_0 nuqtasiga o`tkazilgan urinma deb $M_0M$ kesuvchining $M$ nuqta chiziq bo`ylab M_0 ga intilgandagi limit holatiga aytiladi (85-chizma).



(40.6) ellipsning $M_0(x_0,y_0)$ nuqtasi orqali o`tkazilgan urinma tenglamasini tuzaylik.

Ellipsning $M_0(x_0,y_0)$ nuqtasi orqali o`tgan to`g'ri chiziqning parametrik tenglamasi

$$x=x_0+\alpha t$$

$$y=y_0+\beta t \qquad (44.1)$$

Bu to`g'ri chiziq bilan ellipsning kesishgan nuqtalarini topaylik. Buning uchun $x,y$ larning qiymatlarini ellips tenglamasiga qo`yib t ga nisbatan hosil bo`lgan tenglamani echamiz.

$$\frac{(x_0+\alpha t)^2}{a^2}+\frac{(y_0+\beta t)^2}{b^2}=1$$ M_0 nuqta ellipsda yotgani uchun, uning koorodinatalari (40.6) tenglamani qanoatlantiradi, shuning uchun yuqoridagi tenglama

$$\left(\frac{2\alpha\ x_0.}{a^2}+\frac{2\beta\, y_0}{b^2}\right)t+\left(\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}\right)t^2=0$$

Bu tenglamani yechib ellipsning (44.1) to`g’ri chiziq bilan kesishish parametri *t* ni topamiz.

$$t_1=0,\ t_2=-\left(\frac{2\alpha x_0}{a^2}+\frac{2\beta\, y_0.}{b^2}\right):\left(\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}\right).$$

Ixtiyoriy to`g’ri chiziq uchun $\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}\neq 0$, shuning uchun t_2 hamma vaqt mavjud. Agar ikkinchi kesishish nuqtasi M, M_0 ga intilsa t_2 parametr nolga intiladi.

Demak (44.1) to`g’ri chiziq urinma tenglamasi bo`lishi uchun

$$\frac{\alpha x_0}{a^2}+\frac{\beta y_0}{b^2}=0 \qquad \text{yoki} \qquad \begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ -\frac{y_0}{b^2} & \frac{x_0}{a^2}\end{vmatrix}=0$$

o`rinli bo`lishi zarur va yetarli.

Shunday qilib, urinma $p\left(-\frac{y_0}{b^2},\frac{x_0}{a^2}\right)$ vektorga parallel va

$$\begin{vmatrix}x-x_0 & y-y_0\\ -\frac{y_0}{b^2} & \frac{x_0}{a^2}\end{vmatrix}=0 \qquad \text{yoki} \qquad \frac{xx_0}{a^2}-\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}-\frac{y_0^2}{b^2}=0$$

$(x_0, y_0)\in\gamma$ bo`lgani uchun $-\frac{x_0{}^2}{a^2}+\frac{y_0{}^2}{b^2}=-1$ bundan esa

$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1 \qquad (44.2)$$

tenglamaga ega bo’lamiz.

Shunday qilib, ushbu natijaga kelamiz.

Natija. Ellips har bir $M_0(x_0,y_0)$ nuqtada (44.2) tenglama bilan aniqlangan urinmaga ega.