14 - mavzu: Fazodagi harakat. Harakatning ikki turi. Fazoda harakatning klassifikatsiyasi.

Reja:

1. Fazodagi harakat.
2. Harakatning ikki turi.
3. Fazoda harakatning klassifikatsiyasi.

Fazodagi harakat

Qaralayotgan bobda fazodagi eng sodda almashtirishlar o’rganiladi. Fazodagi almashtirishlarni o’rganishda ishlatiladigan ta’rif va teoremalar tekislikdagi almashtirishlarni o’rganishda ishlatilgan ta’rif va teoremalarga o’xshash bo’ladi. Tekislikdagi almashtirishlarda kiritilgan tushuncha va terminlardan foydalanamiz.

Fazoni almashtirish tushunchasi asosiy tushunchalardan biridir.

Fazodagi nuqtalarini almashtirishda ixtiyoriy ikki A va B nuqtalar orasidagi masofa, ularning akslari A' va B' nuqtalar orasidagi masofaga teng bo’lsa, ya’ni $\rho(A,B)=\rho(A',B')$ bo’lsa, u holda bunday almashtirish masofani o’zgartirmaydi deyiladi.

Ta’rif. Fazodagi masofani o’zgartirmaydigan almashtirishni harakat yoki siljitish deyiladi.

Ayniy almashtirish fazodagi eng sodda harakatga misol bo’la oladi (Ayniy almashtirish fazoning har bir nuqtasini o’z-o’ziga o’tkazadi).

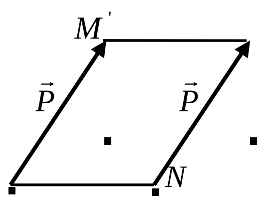
Harakatga boshqa misollar ham keltiraylik.

1-misol. Fazoda ixtiyoriy $\vec{p}$ vektor berilgan bo’lsin. Fazoning ixtiyoriy N nuqtasiga

$\overrightarrow{NN'}=\vec{p}$

shartni qanoatlantiruvchi N' nuqta mos qo’yilsa, u holda bu almashtirishni $\vec{p}$ vektor qadar parallel ko’chirish deb ataladi.

Teorema. Parallel ko’chirish harakatdir.



147-chizma

N' Isbot. Fazoda M va N nuqtalar berilgan bo'lsin. M' va N' nuqtalar esa ularning akslari (obrazlari) bo'lsin, u holda $\overrightarrow{MM'}=\vec{p}$, $\overrightarrow{NN'}=\vec{p}$ bo'ladi. Shuning uchun $\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{NN'}$ vektorlarning tengligidan $|\overrightarrow{MN}|=|\overrightarrow{M'N'}|$ (147-chizma).

2-misol. Fazoda biror O nuqtani olib, fazoning ixtiyoriy M nuqtasini O nuqtaga nisbatan M' nuqtaga mos qo'yuvchi simmetrik akslantirishni qaraylik.

Bu akslantirish almashtirish bo'lib, O nuqtaga nisbatan simmetrik (markaziy simmetriya yoki O nuqtadan qaytish) deyiladi.

Teorema. Nuqtaga nisbatan simmetrik almashtirish harakatdir.

Isboti o'quvchilarga havola qilinadi.

3-masala. Fazodagi T tekislikni olib, fazoning ixtiyoriy M nuqtasini T tekislikka nisbatan simmetrik M' nuqtasiga akslantirishni olaylik (44-chizma). Bu akslantirishni T tekislikka nisbatan simmetrik almashtirish deyiladi.

Teorema. Tekislikka nisbatan simmetrik almashtirish harakatdir.

Isboti. To'g'ri burchakli koordinatalar sistemasining oxy koordinatalar tekisligi T tekislik bilan ustma-ust tushsin deylik (44-chizma). $A(x_1, y_1, z_1)$ va $B(x_2, y_2, z_2)$ fazoning ixtiyoriy nuqtalari A' va B' nuqtalar esa ularning simmetrik almashtirishdagi akslari (obrazlari) bo'lsin. $T = xoy$ bo'lgani uchun A' va B' nuqtalar $A'(x_1, y_1, -z_1)$, $B'(x_2, y_2, -z_2)$ koordinatalarga ega bo'ladi, u holda ikki nuqta orasidagi masofani topish formulasidan foydalanib quyidagini topamiz.

$$\rho(A', B') = \sqrt{(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2} = \rho(A, B).$$

Demak, $\rho(A', B') = \rho(A, B)$. Bu esa tekislikka nisbatan simmetrik almashtirish harakat ekanligini bildiradi.

Harakatning quyidagi xossalarini isbotlash mumkin:

1°. Harakat tekisliklarni tekisliklarga, parallel tekisliklarni parallel tekisliklarga o'tkazadi.

2°. Harakat to'g'ri chiziqlarni to'g'ri chiziqlarga, parallel to'g'ri chiziqlarni parallel to'g'ri chiziqlarga o'tkazadi.

3°. Harakat ikki yoqli burchakni o'ziga teng ikki yoqli burchakka o'tkazadi.

4°. Harakat uchta nuqtaning oddiy nisbatini saqlaydi.

5°. Harakat to'g'ri burchakli dekart koordinatalar sistemasini to'g'ri burchakli dekart koordinatalar sistemasiga o'tkazadi.

Harakatning ikki turi. Invariant nuqta, to'g'ri chiziq va tekislik

1. Fazoda ikkita $(O, \vec{e}_1\, \vec{e}_2\, \vec{e}_3)$ va $(O, \vec{e}'_1\, \vec{e}'_2\, \vec{e}'_3)$ affin koordinatalar sistemasi bir xil oriyentirlangan (qarama-qarshi oriyentirlangan) bo'lishi uchun bazis $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ va $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3$ bazis vektorlar bir xil yo'nalishga (qarama-qarshi yo'nalishga) ega bo'lishi kerak (7-§ ga qarang).

Teorema. Fazodagi ixtiyoriy harakat yo fazo oriyentatsiyasini saqlaydi yoki oriyentatsiyasini o'zgartiradi.

Bu teoremaning isboti tekislik uchun berilgan teorema isbotiga o'xshash bo'ladi.

Shunday qilib, fazoda ikki tur harakat mavjud: birinchi fazo oriyentatsiyasini o'zgartirmaydigan, ikkinchisi fazo oriyentatsiyasini o'zgartiradigan harakat. Birinchi holdagi harakatni birinchi tur harakat, ikkinchi holdagi harakatni ikkinchi tur harakat deyiladi.

2. Fazoda ham invariantlik masalalari tekislikdagidek hal qilinadi.

Agar fazo nuqtasi almashtirishda o'z-o'ziga o'tsa, bunday nuqtani fazoning invariant (qo'zg'almas) nuqtasi deyiladi. Shunga o'xshash to'g'ri chiziq (tekislik) almashtirishda o'zi-o'ziga o'tsa, invariant to'g'ri chiziq (tekislik) deyiladi.

Xususan, invariant to'g'ri chiziqning hamma nuqtalari invariant nuqtalardan, invariant tekislikning hamma nuqtalari invariant nuqtalardan iborat bo'lishi mumkin.

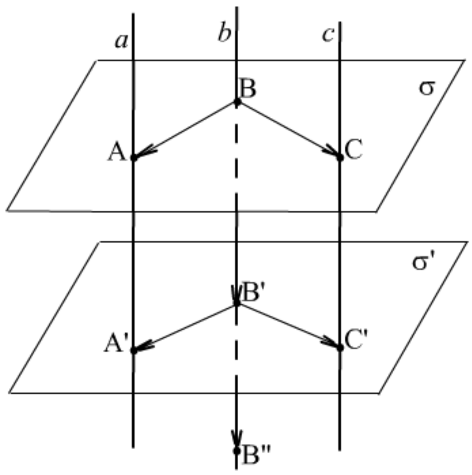
Fazoda L-harakat va T invariant tekislik berilgan bo'lsin. Bu harakatda invariant tekislikning ixtiyoriy nuqtasi yana shu tekislik nuqtasiga o'tadi, ya'ni T tekislikda L' akslantirish vujudga keladi, bu akslantirish harakatdan iborat ekanligi ravshan, chunki masofani saqlaydi. Bu almashtirishni L-harakatning T tekislikka indutsirlangan (singdirilgan) harakati deyiladi.

Harakatning turlarini aniqlash uchun zarur bo'ladigan uchta teoremani beramiz.

1-teorema. Agar harakat invariant nuqtaga ega bo'lmasa, u holda ixtiyoriy ikki invariant to'g'ri chiziqlari parallel bo'ladi.

Isbot. Teskarisini faraz qilib isbotlaymiz. L-harakatning parallel bo'lmagan d_1 va d_2 invariant to'g'ri chiziqlari bo'lsin. U holda bu to'g'ri chiziqlar yo kesishadi yoki ayqash bo'ladi. Birinchi holda, M nuqta d_1 va d_2 to'g'ri chiziqlarning kesishgan nuqtasi L-harakatda M' nuqtaga o'tsin. Bu nuqta ham d_1 to'g'ri chizig'ida, ham d_2 to'g'ri chizig'ida yotadi, ya'ni $M = M'$. Bu teorema shartiga ziddir (invariant nuqta yo'q).

Ikkinchi holati d_1 va d_2 to'g'ri chiziqlar ayqash bo'lsin. Bu holda d_1 va d_2 to'g'ri chiziqlar umumiy AB perpendikulyarga ega bo'ladi. $A \in d_1$, $B \in d_2$. AB ikki to'g'ri chiziq orasidagi eng qisqa masofa, u holda L-harakatda A va B nuqtalar invariant nuqtalar bo'ladi, bu teorema shartiga ziddir.



148-chizma

2-teorema. Agar L-harakat invariant nuqtaga ega bo'lmay, lekin bir tekislikda yotmaydigan kamida uchta parallel invariant to'g'ri chiziqlar mavjud bo'lsa, u holda L-harakat invariant to'g'ri chiziqqa parallel bo'lgan nol bo'lmagan vektor qadar parallel ko'chirishdan iborat (148-chizma).

3-teorema. Fazodagi ixtiyoriy harakat kamida bitta invariant to'g'ri chiziqqa ega.

Keyingi ikki teoremani isbotini o'quvchilarga havola qilamiz.

Fazodagi harakat klassifikatsiyasi

Fazoda ikkita $R(O, ABC)$ va $R'(O', ABC)$ affin reperi (yoki affin koordinatalar sistemasi) berilgan bo'lsin. Agar bu reperlarning bazis $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ va $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3$ vektorlarining yo'nalishlari bir xil (qarama-qarshi) bo'lsa, R va R' reperlar oriyentatsiyasi bir xil (qarama-qarshi) deyiladi.

Fazodagi harakat klassifikatsiyasi tekislikdagi harakat klassifikatsiyasiga o'xshash bo'ladi. Bu yerda ham harakatni klassifikatsiyalashda uning invariant nuqtalaridan foydalanamiz.

1. *Fazodagi harakat bir to'g'ri chiziqda yotmaydigan kamida uchta invariant nuqtaga ega bo'lsin.*

A, B, C nuqtalar - g harakatning bir to'g'ri chiziqda yotmaydigan invariant nuqtalari, AD to'g'ri chiziq esa ABC tekislikka perpendikulyar to'g'ri chiziq bo'lsin. (47-chizma).

g - harakat ABC tekislik nuqtalarini yana shu tekislik nuqtalariga o'tkazishi ravshan, ya'ni bu tekislik invariant. Shuning uchun AD to'g'ri chiziq ham invariant. Demak D nuqta ham, uning obrazi D' nuqta ham AD to'g'ri chiziqda yotadi.

g almashtirish D nuqtani $AD = AD'$ shartni qanoatlantiruvchi D' nuqtaga o'tkazsin. Bunda quyidagicha ikki hol yuz berishi mumkin.

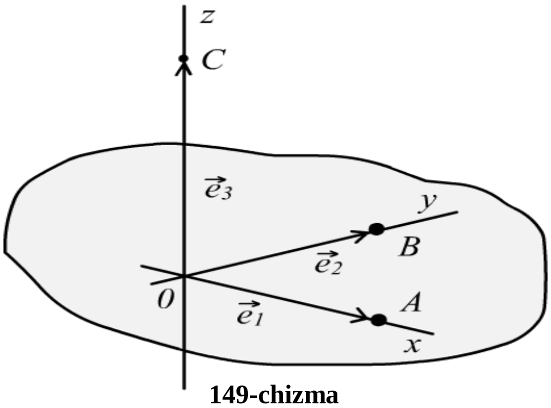
1) D' nuqta D nuqta bilan ustma-ust tushsin, u holda $(ABCD)$ reperning uchlari o'z-o'ziga o'tadi. Demak, g ayniy almashtirishdir.

Ma'lumki, ayniy almashtirish-birinchi tur harakatdir.

2) D va D' nuqtalar A nuqtaga simmetrik. g-almashtirishda $R(ABCD)$ reper $R'(ABCD')$ reperga o'tadi. Demak, g - almashtirish (ABC) tekislikka nisbatan simmetrik almashtirishdan iborat. Bizga ma'lumki tekislikka nisbatan simmetrik almashtirish - ikkinchi tur almashtirish bo'ladi.

2. *Fazodagi harakat kamida ikkita invariant A, B nuqtalarga ega, lekin AB to'g'ri chizigda yotmaydigan birorta ham invariant nuqtaga ega bo'lmasin.*

Bu holda $AB=d$ to'g'ri chiziqning ixtiyoriy nuqtasi invariant nuqta bo'ladi. Haqiqatan ham, N AB to'g'ri chiziqning ixtiyoriy nuqtasi. N' nuqta esa uning aksi. Harakatda uchta nuqtaning oddiy nisbati o'zgarmaydi yani $(AB,N)=(AB,N')$.



149-chizma

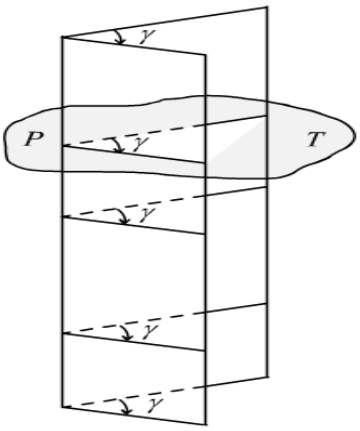
A,B nuqtalar invariant nuqtalar bo'lgani uchun N va N' nuqtalar ham ustma-ust tushadi. Demak, N nuqta berilgan harakatning invariant nuqtasidir.

Shunday qilib, AB to'g'ri chiziq nuqtalari invariant nuqtalardan iborat.

AB to'g'ri chiziqqa uning biror P nuqtasiga T-perpendikulyar tekislik o'tkazaylik. (150-chizma).

Ma'lumki T tekislik berilgan L harakatda invariant tekislik bo'ladi.

Shuning uchun T tekislikda qandaydir g harakatni indutsirlaydi (singdiradi), ya'ni vujudga keltiradi. P nuqta bu harakatning qo'zg'almas nuqtasi bo'ladi. Demak, g harakat P nuqta atrofida biror φ burchakka $(\varphi \neq 0)$ burishdan iborat.



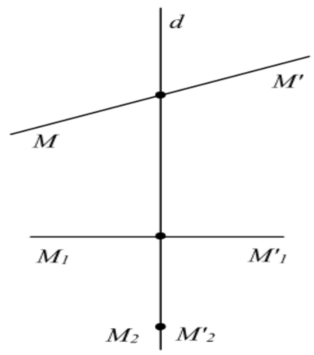
150-chizma

L-harakat AB to'g'ri chiziq orqali o'tuvchi ixtiyoriy tekislikni ya'ni shu to'g'ri chiziq orqali o'tuvchi tekislikka o'tkazadi (48-chizma), u holda AB to'g'ri chiziqqa perpendikulyar har bir tekislikda aynan bir xil φ burchakka burishni indutsirlaydi (singdiradi), ya'ni paydo qiladi.

Bu hosil qilingan harakatni fazodagi AB to'g'ri chiziq atrofida φ burchakka burish deyiladi. AB to'g'ri chiziqni burish o'qi, φ burchakni burish burchagi deyiladi. (150-chizma).

Teorema. Fazodagi AB to’g’ri chiziq atrofidagi burish birinchi tur harakatdir.

Bu teorema isbotini talabalarning o’zlariga tavsiya qilamiz.



151-chizma

Fazodagi d to’g’ri chiziq atrofida π burchakka burish, d to’g’ri chiziqqa nisbatan simmetriya deyiladi (151-chizma).

Bu holda fazoning har bir M nuqtasiga d to’g’ri chiziqqa nisbatan simmetrik bo’lgan M' nuqta mos keladi (151-chizma).

$\varphi = 0$ burchakka burishni ayniy almashtirish deyiladi.

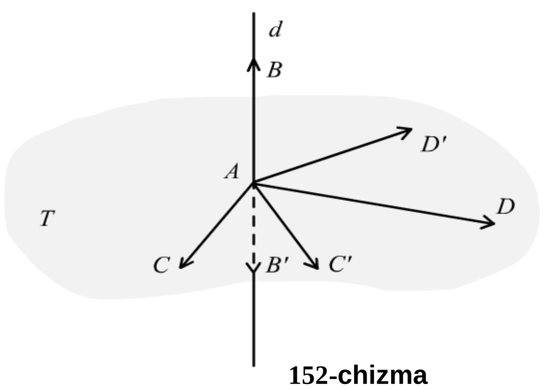
3. *Bitta qo’zg’almas* A *nuqtaga ega bo’lgan harakat.*

Har qanday harakat 23-§ dagi uchinchi teoremaga ko’ra qo’zg’almas d to’g’ri chiziqqa ega. A nuqtaning invariant d to’g’ri chiziqqa qarashli ekanligi ravshan, aks holda A nuqtadan d to’g’ri chiziqqa tushirilgan perpendikulyar asosi ham invariant nuqta bo’ladi. Buning bo’lishi shartga ko’ra mumkin emas.

Invariant A nuqtadan o’tib, d to’g’ri chiziqqa perpendikulyar tekislikni T bilan belgilaylik. T tekislik - L harakatda invariant bo’lganligi tufayli, T tekislikda invariant nuqtasi A nuqtadan iborat g harakatni vujudga keltiradi. Bu harakat faqat bitta invariant A nuqtaga ega bo’lganligi uchun u A nuqta atrofida biror φ $(\varphi \neq 0)$ burchakka burishdan iborat bo’ladi.

Endi ortonormallashgan $R(ABCD)$ reperni quyidagicha tanlab olaylik: B nuqta d to’g’ri chiziqda, C va D nuqtalar T tekislikda yotsin (48-chizma).

$B \in d$ nuqta qo’zg’almas nuqta emas, u holda $B' = g(B)$ nuqta A nuqtaga nisbatan B nuqtaga simmetrik. Fazodagi L harakat $R(ABCD)$ reperni $R'(AB'C'D')$ reperga



152-chizma

o’tkazadi. Shu bilan birga T tekislikdagi $R_1(ACD)$ reperni yo’nalishi bir xil bo’lgan $R'_1(AC'D')$ reperga o’tkazadi (152-chizma).

Shuning uchun R va R' reperlar qarama-qarshi yo’nalishga ega bo’ladi. Bundan g harakat ikkinchi tur harakat ekanligi kelib chiqadi.

Bu g harakatni burish simmetriyasi deyiladi.

Bunda d to’g’ri chiziq, φ burchak, T tekislik va A nuqta mos ravishda burish simmetriyaning o’qi, burchagi, tekisligi va markazi deyiladi.

Geometrik nuqtai nazardan burish simmetriyasi, d to’g’ri chiziq atrofida φ burchakka burish g_1 bilan, T tekislikka simmetriya g_2 ning ko’paytmasidan iborat. $g = g_2 \cdot g_1$.

Agar $\varphi = \pi$ bo’lsa, burish simmetriyasi qo’zg’almas nuqtaga nisbatan simmetriya bo’ladi.

4. *Harakatning bitta ham qo’zg’almas nuqtasi mavjud emas*.

g berilgan harakat, d - uning invariant to’g’ri chizig’i bo’lsin. Ma’lumki bu harakatning d dan boshqa invariant to’g’ri chizig’i mavjud bo’lsa, u d ga parallel bo’ladi (3-teorema, 23-§).

Bunda quyidagi uchta holning biri o’rinli bo’lishi mumkin.

1) Kamida uchta o’zaro parallel va bir tekislikda yotmaydigan invariant to’g’ri chiziqlar mavjud. Bunda (2-teoremaga asosan) g harakat nol bo’lmagan $\vec{p}$ vektor qadar parallel ko’chirishdan iborat bo’ladi. Buning invariant to’g’ri chiziqlari fazoning faqat $\vec{p}$ vektorga parallel bo’lgan to’g’ri chiziqlardan iborat bo’ladi. Ravshanki, parallel ko’chirish-birinchi tur harakatdir.

2) Kamida ikkita parallel invariant to’g’ri chiziqlar mavjud. Boshqa barcha invariant to’g’ri chiziqlar, agar ular mavjud bo’lsa, bu to’g’ri chiziqlar orqali o’tgan tekislikda yotadi. Bu holdagi g harakatni sirpanuvchi simmetriya deyiladi. g ning T tekislikka simmetriya bilan $\vec{p} \neq \vec{0}$ vektor qadar parallel ko’chirish

ko'paytmasidan iborat ekanini isbotlash qiyin emas. Sirpanuvchi simmetriya – ikkinchi tur harakat.

3) Harakat faqat bitta d invariant to'g'ri chiziqqa ega. Bu holda g harakatni vint harakati deyiladi.

Bu g harakat, d to'g'ri chiziq atrofida $\varphi \neq 0$ burchak burish bilan, d to'g'ri chiziqqa parallel $\vec{p} \neq \vec{0}$ vektor qadar parallel ko'chirish ko'paytmasidan iborat ekanini isbotlash qiyin emas. Vint harakati – birinchi tur harakat.

Shunday qilib, fazodagi harakatning olti xili mavjud bo'lib, ular quyidagi jadvalda keltirilgan:

Birinchi tur harakat	
1.	$\vec{p}$ vektor qadar parallel ko'chirish. a) $\vec{p} \neq \vec{0}$ vektor qadar parallel ko'chirish. b) $\vec{p} = \vec{0}$. Ayniy almashtirish.
2.	To'g'ri chiziq atrofida φ burchakka burish. a) φ burchakka burish, bu yerda $\varphi \neq 0$ va $\varphi \neq \pi$ b) $(\varphi = 0)$. Ayniy harakat. v) $(\varphi = \pi)$. To'g'ri chiziqqa nisbatan simmetriya.
3.	Vint harakati.
Ikkinchi tur harakat	
4.	Tekislikka nisbatan simmetriya.
5.	$\varphi \neq 0$ burchakka burish simmetriya. a) $\varphi \neq 0$ va $\varphi = \pi$ burchakka burish simmetriya. b) Nuqtaga nisbatan simmetriya $(\varphi = \pi)$.
6.	Sirpanuvchi simmetriya.