12 – мавзу: Tekislikdagi harakat, uning eng sodda turlari, analitik ifodasi. Harakatni o`q simmetriyalar ko`paytmasiga yoyish.

Режа:

1. Tekislikdagi harakat, uning eng sodda turlari, analitik ifodasi.
2. Harakatni o`q simmetriyalar ko`paytmasiga yoyish.

Tekislikda harakat va uning xossalari. Harakatning sodda turlari.

1. Maktab geometriya kursida eng sodda almashtirishlar bilan tanishish ko’zda tutiladi, ular: parallel ko’chirish, simmetriya burish va o’xshash almashtirishlardan iborat.

Parallel ko’chirish, simmetriya va burish barchasi adabiyotlarda bitta «harakat», yoki «siljitish» yoki «izometriya» deb aytiladi.

1-ta’rif. Tekislikning ixtiyoriy ikki nuqtasi orasidagi masofani o’zgartirmaydigan almashtirish «*harakat*» yoki «izometriya» deyiladi.

Harakatni L orqali belgilaymiz.

L harakat bo’lsa, tekislikning har qanday ikki M,N nuqtasi uchun

$\rho(M,N) = \rho(L(M), L(N))$ $(M^1 = L(M)\ N^1 = L(N))$

Harakat xossalarini ko’rib chiqaylik.

1°. Harakat kesmani o’ziga teng kesmaga o’tkazadi.

2°. Harakat bir to’g’ri chiziqda yotuvchi nuqtani, yana bir to’g’ri chiziqda yotuvchi nuqtaga o’tkazadi.

3°. Harakat to’g’ri chiziqni, to’g’ri chiziqqa o’tkazadi.

4°. Harakat nurni nurga o’tkazadi.

5°. Harakatda burchak kattaligi o’zgartirmaydi.

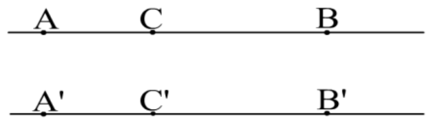
6°. Harakat, parallel to’g’ri chiziqlarni ya’na parallel to’g’ri chiziqlarga o’tkazadi.

7°. Harakat ko’pburchakni yana ko’pburchakka o’tkazadi (bunda mos burchaklarning kattaligi, tomonlarining uzunliklari o’zgarmaydi)

8°. Harakat aylanani yana aylanaga o’tkazadi, bunda aylana radiuslari o’zgarmaydi.

9°. Tekislikdagi harakatlar to’plami gruppa tashkil qiladi

Isboti: 1° xossani isbotlaylik. Tekislikda ikkita A va B nuqtalarni olaylik. Harakat A va B nuqtalarni $L(A)=A'$ va $L(B)=B'$ nuqtalarga o'tkazsin.



57-chizma

Agar $C\in AB$ bo'lsa, u holda (57-chizma)

$\rho(AC)+\rho(CB)=\rho(AB)$ (28.1)

Harakat ta'rifiga asosan

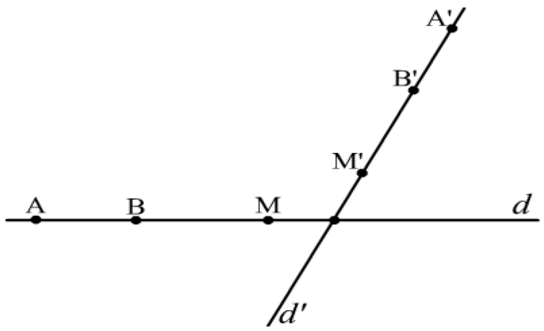
$$\rho(A'C') +\rho(C'B') = \rho(A'B') \quad (28.2)$$

bu esa $C'\in A'B'$ ko'rsatadi.

Aksincha, agar qandaydir C' nuqta $C'\in A'B'$ bo'lsa, u holda (28.2) tenglik o'rinli bo'ladi, bundan (28.1) tenglikning o'rinligini, undan esa $C\in AB$ bo'ladi.

2° isbotini ko'rib chiqaylik. A, B, C bir to'g'ri chiziq nuqtalari bo'lsin, harakatda ularga A', B', C' nuqtalar mos kelsin. Aniqlik uchun C nuqta A va B nuqtalar orasida yotsin deylik. U holda 1° xossaga asosan $C'\in A'B'$ da yotadi. Demak, A', B', C' nuqtalar bir to'g'ri chiziqda yotadi.

Nuqtalarning bir to'g'ri chiziqda yotish xossasini *kollinearlik munosabati* deyiladi. Kollinearlik munosabatini saqlovchi almashtirish kollineatsiya deyiladi. Demak, tekislikdagi harakat kollineatsiyadan iborat bo'ladi.



58-chizma

3° Tekislikda L-harakat va ixtiyoriy d to'g'ri chiziq berigan bo'lsin. d to'g'ri chiziqda yotuvchi ikkita A va B nuqtalarni olamiz. Harakat $L(A)=A'$, $L(B)=B'$. A' va B' nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziqni d' bilan belgilaymiz (58-hizma).

Agar M nuqta d to'g'ri chiziqqa qarashli ixtiyoriy nuqta bo'lsa, u holda 1° xossaga ko'ra $L(M)=M'\in d'$.

4°-9° larni talabalar mustaqil ish sifatida o'rganiladi.

2-ta'rif. Agar ikki figuradan birini ikkinchisiga o'tkazadigan harakat mavjud bo'lsa, bu figuralar *kongruent* deyiladi. Bu kongruent figuralar tekislikdagi vaziyatlari bilan farq qiladi xolos.

Teorema. Tekislikdagi L harakat R to’g’ri burchakli koordinatalar sistemasini, R' to’g’ri burchakli koordinatalar sistemasiga o’tkazsa, $M'=L(M)$ nuqtaning R' koordinatalar sistemasidagi koordinatalari M nuqtaning R to’g’ri burchakli koordinatalar sistemasidagi koordinatalari bilan bir xil bo’ladi (59-chizma).

Isbot. $R(0,i,j)$ tekislikdagi to’g’ri burchakli dekart koordinatalar sistemasi.

$L(O) = O'$, $L(A_1)=A_1'$, $L(A_2)=A_2'$ o’tkaziladi. Yuqoridagi xossalarga asosan O'_1, A'_1 va A'_2 nuqtalar bir to’g’ri chiziqda yotmaydi va $\angle A'_2O'A'_1=90^0$. Demak R' dekart koordinatalar sistemasi bo’ladi.

59-chizma

Tekislikda ixtiyoriy M nuqtasini R ga nisbatan koordinatalari x,y bo’lsin.

$$x=\frac{OM_1}{OA_1}=-\frac{M_1O}{OA_1}=-(M_1A_1O)$$

$$y=\frac{OM_2}{OA_2}=-\frac{M_2O}{OA_2}=-(M_2A_2O)$$

M' nuqtaning R' ga nisbatan koordinatalari x',y' bo’lsin

$$x'=\frac{O'M'_1}{O'A'_1}=-\frac{M'_1O'}{O'A'_1}=-(M'_1A'_1O')$$

$$y'=\frac{O'M'_2}{O'A'_2}=-\frac{M'_2O'}{O'A'_2}=-(M'_2A'_2O')$$

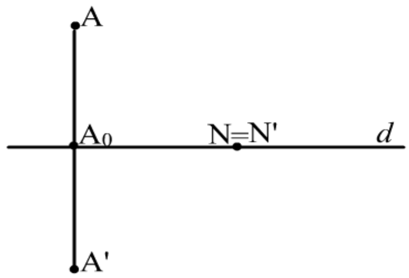
$(M,A,O) = (M^1{}_1 A^1{}_1 O^1)$, $(M_2A_2O) = (M'_2 A'_2 O')$ tengliklardan $x=x'$, $y = y'$.

2. Harakatning eng sodda turlarini ko’rib chiqaylik,

a) To’g’ri chiziqqa nisbatan simmetriya (S_d)

Tekislikda d to’g’ri chiziq berilgan bo’lsin.

3-ta’rif. Tekislikdagi A, A^1 nuqtalar uchun AA^1 kesma d ga perpendikulyar bo’lib, AA^1 kesmaning



60-chizma

o'rtasi *d* to'g'ri chiziqida yotsa, u holda bu nuqtalar *d* ***to'g'ri chiziqqa nisbatan simmetrik*** deb ataladi va S_d ko'rinishda yoziladi.

d to'g'ri chiziqni ***simmetriya o'qi*** deyiladi. Agar biror nuqta $N \in d$ bo'lsa, u holda $S_d(N)=N$ (60-chizma) ya'ni *d* to'g'ri chiziqning har bir nuqtasi simmetrik almashtirishda o'z-o'ziga o'tadigan qo'sh nuqtadan iborat bo'ladi.

Tekislikda bulardan tashqari bunday xossaga ega bo'lgan nuqta mavjud emas.

To'g'ri chiziqqa nisbatan simmetrik almashtirish quyidagi xossalarga ega:

1° S_d simmetrik almashtirish to'g'ri chiziqni to'g'ri chiziqqa o'tkazadi.

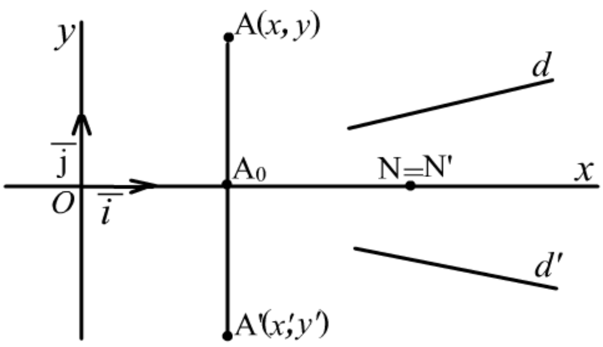
2° S_d simmetrik almashtirish ikki nuqta orasidagi masofani saqlaydi.

Bu xossalarni koordinatalar metodidan foydalanib isbotlaymiz.

To'g'ri burchakli dekart koordinatalar sistemasining Ox o'qini simmetriya o'qi deb olsak, $A(x,y)$ nuqtaning aksi $A'(x',y')$ bo'ladi (61-chizma).

Bunda
$$\begin{matrix} x' = x \\ y' = -y \end{matrix} \qquad (28.3)$$

(28.3) Ox o'qiga nisbatan simmetrik almashtirish formulasi.



61-chizma

Simmetrik almashtirish xossalarini isbotlaylik.

1° Agar *d* to'g'ri chiziq tenglamasi $Ax+By+C=0$ berilsa, uning d^1 aksini (28.3) almashtirishdan foydalanib topamiz,

$Ax^1-By^1+C=0$. Bu yana to'g'ri chiziqdir.

2°. Tekislikning ixtiyoriy ikkita $A(x_1,y_1)$ va $B(x_2,y_2)$ nuqtalari, $A'(x'_1,y'_1), B'(x'_2,y'_2)$ nuqtalar esa ularning aksi bo'lsin. (28.3) formulani e'tiborga olib, bu nuqtalar orasidagi masofani hisoblaymiz

$$\rho(A',B') = \sqrt{(x_2^1-x_1^1)^2+(y_2^1-y_1^1)^2} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(-y_2-(-y_1))^2}$$
$$= \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} = \rho(A,B)$$

Demak simmetrik almashtirish harakatdir.

4-ta'rif. Agar biror F figura d to'g'ri chiziqqa nisbatan simmetrik almashtirishda o'z-o'ziga o'tsa, u holda d to'g'ri chiziq bu figuraning *simmetriya o'qi* deyiladi.

b) *Parallel ko'chirish* ($T\vec{a}$). Tekislikda $\vec{a} \neq 0$ vektor berilgan bo'lsin.

5-ta'rif. Tekislikning har bir *A* nuqtasiga

$$\overrightarrow{AA'} = \vec{a} \qquad (28.4)$$

shartni qanoatlantiruvchi A^1 nuqtani mos keltirishga tekislikdagi $\vec{a}$ ***vektor qadar parallel ko'chirish*** deyiladi. Uni $T\vec{a}$ ko'rinishda belgilanadi. $\vec{a}$ vektorni ***ko'chirish vektori*** deyiladi.

Ta'rifga ko'ra, $T\vec{a}$ parallel ko'chirish tekislikning barcha nuqtalarini $\vec{a}$ vektor yo'nalishida $|\vec{a}|$ masofaga siljitadi.

Parallel ko'chirish quyidagi xossalarga ega:

1^0. Parallel ko'chirish, to'g'ri chiziqni unga parallel to'g'ri chiziqqa o'tkaziladi.

2^0. Parallel ko'chirishda ikki nuqta orasidagi masofaga o'zgarmaydi.

Isbot: 1^0. Xossani isbotlaylik.

Agar $A^1(x^1_1;y^1_1)$ nuqta $A(x;y)$ nuqtaning aksi bo'lsa, u holda ta'rifga ko'ra $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$. Bunda $\vec{a}$ (x_0,y_0) va $\overrightarrow{AA'}$ $(x'-x, y'-y)$ koordinatalarga ega. (28.4) dan:

$$\begin{cases} x'-x = x_0 \\ y'-y = y_0 \end{cases}, \quad \text{ya'ni} \quad \begin{cases} x' = x + x_0 \\ y' = y + y_0 \end{cases} \qquad (28.5)$$

Parallel ko'chirish formulasiga ega bo'lamiz.

1^0. Tekislikda d to'g'ri chiziq $Ax + By+C = 0$ tenglama bilan berilgan bo'lsin. (28.5) formuladan foydalanib d to'g'ri chiziqni $\vec{a}$ vektor qadar parallel ko'chiramiz. Ya'ni $x = x'-x_0$, $y = y'-y_0$ qiymatlarni d to'g'ri chiziq tenglamasiga qo'yib:

$$d^1: Ax^1+By^1+(C-Ax_0-By_0)=0 \qquad (28.6)$$

birinchi darajali tenglamaga ega bo'ldik, bu (28.6) tenglama to'g'ri chiziq tenglamasi, $d \parallel d^1$

Demak $T\vec{a}$ $(d) = d^1$ to'g'ri chiziq.

2°. Ikkita ixtiyoriy $A(x_1;x_2)$ va $B(x_2;\ y_2)$ nuqtalarning obrazlari $A^1(x^1_1,y^1_1)$ va $B^1(x^1_2,y^1_2)$ nuqtalar bo'lsin, u holda

$$\begin{cases} x'_1 = x_1 + x_0 \\ y'_1 = y_1 + y_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x'_2 = x_2 + x_0 \\ y'_2 = y_2 + y_0 \end{cases} \qquad (28.7)$$

Ikkita A^1 va B^1 nuqtalar orasidagi masofani (28.7) formulani e'tiborga olib hisoblasak,

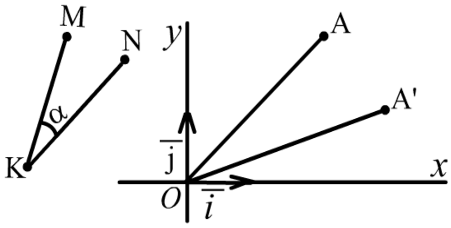
$$\rho(A^1,B^1)=\sqrt{(x_2^1-x_1^1)^2+(y_2^1-y_1^1)^2}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\rho(A,B)$$

Demak parallel ko'chirish harakat.

v) Burish (R^a)

Tekislikda yo'nalishga ega bo'lgan α burchak berilgan bo'lsin.

6-ta'rif. Tekislikning har bir A nuqtasiga ushbu



62-chizma

1. $\rho(0,A)=\rho(O,A^1)$;

2. $<A0A^1=<NKM=\alpha$;

shartlarni qanoatlantiruvchi A^1 nuqtani mos keltiruvchi almashtirishga O nuqta atrofida berilgan α burchakka burish deyiladi. (62-chizma)

O nuqta burish markazi, α burish burchagi deyiladi.

Tekislikdagi O nuqta atrofidagi α burchakka burish R^{α}_0 bilan belgilanadi.

R^{α}_0 burish quyidagi xossalarga ega:

1°. Burish to'g'ri chiziqni to'g'ri chiziqqa o'tkazadi.

2°. Ikki nuqta orasidagi masofa o'zgarmaydi.

Bu xossalarni koordinatalar metodi bilan isbotlash mumkin.

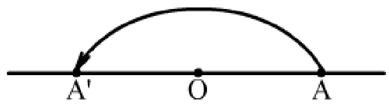
Burish ham harakat bo'ladi.

g) Markaziy simmetriya (S_0)

7-ta'rif. Tekislikdagi biror O nuqta atrofida $\alpha=180°$ ga burish O nuqtaga nisbatan simmetrik almashtirish yoki markaziy simmetriya deyiladi va S_0 bilan belgilanadi.

O nuqta simmetriya markazi deyiladi.

(63-chizma)



63-chizma

Markaziy simmetriyada simmetriya markazi O nuqta A nuqta va uning aksi A^1 nuqtalar bir to’g’ri chiziqda yotadi va $OA \equiv OA^1$.

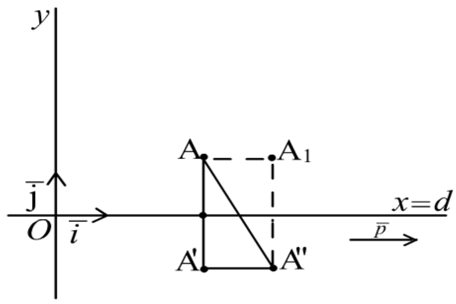
Markaziy simmetriyaning harakat ekanligini isbotlash qiyin emas.

8-ta’rif. Agar birorta figura O nuqtaga nisbatan simmetrik almashtirishda o’z-o’ziga o’tsa, u holda O nuqta figuraning simmetriya markazi deyiladi.

d) Sirpanuvchi simmetriya.

Tekislikda S_d simmetriya $T_{\vec{p}}$ $(\vec{p} \neq 0, \ \vec{p} \,||\, d)$ parallel ko’chirish berilgan bo’lsin.

9-ta’rif. $f = T_{\vec{p}} \cdot S_d$ almashtirish kompozitsiyasi sirpanuvchi simmetriya deyiladi (64-chizma).



64-chizma

Agar $S_d(A)=A'$ ga va $T_{\vec{p}}(A')=A''$ga o’tkazsa, u holda $f(A)=A''$ ga o’tkazadi.

Agar $T_{\vec{p}}(A)=A_1$ ga va $S(A_1)=A''$ ga o’tkazsa $f(A)=A''$ ga o’tkazadi (64-chizma).

Demak $T_{\vec{p}} \cdot S_d = S_d \cdot T_{\vec{p}}$.

Sirpanuvchi simmetriya kommutativlik xossasiga ega.

Agar $A(x,y)$, $A^1(x^1,y^1)$ $A^{11}(x^{11},y^{11})$ koordinatalarga ega, $d = Ox$ bo’lsa:

$$S_{0x}: \begin{cases} x^1 = x \\ y^1 = -y \end{cases} \qquad T_p: \begin{cases} x^{11} = x^1 + x_0 \\ y^{11} = y^1 \end{cases}$$

bundan
$$f: \begin{cases} x^{11} = x + x_0; \\ y^{11} = -y \end{cases} \qquad (28.8)$$

(28.8) $d=Ox$ bo’lgan sirpanuvchi simmetriya formulasidir. Yuqoridagi ko’rilgan xossalar ham sirpanuvchi simmetriya uchun o’rinli bo’lishini ko’rsatish qiyin emas.

(28.8) formuladan $\varepsilon = -1$ ekanligi ma’lum. Demak, sirpanuvchi simmetriya ikkinchi tur harakat.