11 – мавзу: **Akslantirishlar va almashtirishlar. Almashtirishlar gruppasi va uning qism gruppasi.**

Режа:

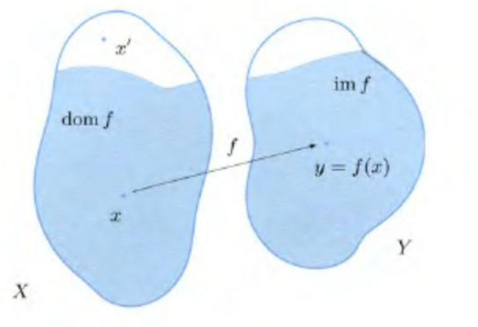
1. Tekislikda to'plamlarni akslantirish va almashtirishlar
2. Almashtirishlar gruppasi va uning qism gruppasi.

Tekislikda to'plamlarni akslantirish va almashtirishlar.

1. Tabiatda, fan va texnikada hamma vaqt shunday hodisalar uchraydiki uning ta'sirida u yoki bu narsalar o'zining tashqi ko'rinishini, o'lchamlarini va fazodagi vaziyatlarini o'zgartiradi. Masalan, shamol ta'sirida daraxtlar egiladi, metallar issiqdan kengayadi, mayatnik tebranib turadi. Bu hamma hollarda narsalar almashadi deb aytiladi.

Funksiya ta'rifi. Bizga ixtiyoriy X va Y to'plamlar berilgan bo'lsin.

1-ta'rif. Agar X to'plamdan olingan har bir x elementga biror qonunga binoan Y to'plamdan aniq bitta y element mos qo'yilgan bo'lsa, u holda X to'plamni Y to'plamga akslantirish berilgan deyiladi va u quyidagicha belgilanadi: $f: X \to Y$, $X \xrightarrow{f} Y$.



Bu yerda y element x ning aksi (obrazi) deyiladi va $y = f(x)$ yoki $x \xrightarrow{f} y$ ko'rinishda yoziladi, x ni esa y ning asli (proobrazi) deyiladi.

Geometriyada bir F figurani F' figuraga almashtirishda figuraning oraliqdagi o'zgarishlarini e'tiborga olinmaydi, faqat boshlangich va oxirgi vaziyatlari o'rganiladi.

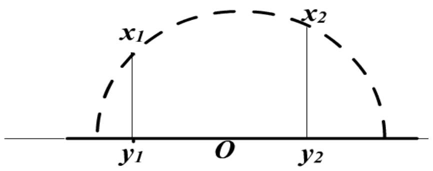
Tekislikdagi har bir figurani nuqtalar to'plami deb olamiz.

Bo'sh bo'lmagan ikkita X va Y to'plamlar berilgan bo'lsin.

1-ta'rif. Agar X to'plamning har bir x elementiga Y to'plamning aniq bir y elementini mos qo'yuvchi f qonun yoki qoida berilsa, u holda X to'plamni Y to'plamga ***akslantirish*** *berilgan* deyiladi.[1]

[1] Canuto, C., Tabacco, A. Mathematical Analysis I, 31-38, mazmun – mohiyatidan foydalanildi

«f qoida X to’plamni Y to’plamga akslantiradi» degan jumlani $f{:}X\rightarrow Y$ yoki $X\xrightarrow{f}Y$ ko’rinishda yozamiz. $y=f(x)$ elementni x elementning f akslantirishdan *aksi* (obrazi), x ni esa y elementning *asli* (proobrazi) deyiladi.



48-chizma

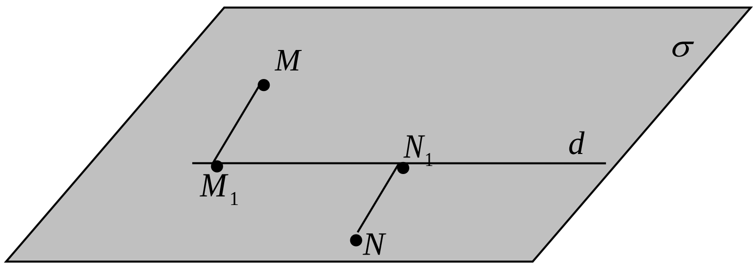
1-misol. Shaxmat donalari X to’plam va shaxmat taxtasidagi kataklari Y to’plam berilgan bo’lsin. Shaxmat donalarini taxtaga terish f_1 bilan X to’plamni Y to’plamga akslantirish o’rnatiladi,

ya’ni $f_1{:}X\rightarrow Y$.

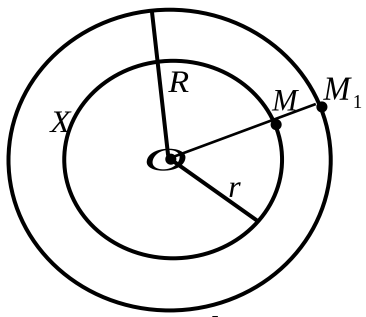
$f{:}X\rightarrow Y$ akslantirishning muhim xususiy hollari bilan tanishamiz.

Agar ixtiyori $x_1, x_2\in X$ elementlar uchun $x_1\neq x_2\rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$ bo’lsa, u holda X to’plamni Y to’plam ichiga akslantirish yoki in’ektsiya deyiladi.[2]

2-misol. Yarim aylanani X to’plam deb, yarim aylana diametri orqali o’tuvchi to’g’ri chiziqni Y to’plam deb olaylik (48-chizma). f_2-qoida deb X to’plam nuqtalarini Y to’plam nuqtalariga ortogonal proektsiyalarini olsak X to’plam Y to’plam ichiga bir qiymatli akslanadi.



49-chizma



50-chizma

2. Agar f akslantirishda obrazlar to’plami Y to’plamdan iborat bo’lsa, ya’ni $f(X)=Y$ bo’lsa, u holda $f{:}X\rightarrow Y$ akslantirish X to’plamni Y to’plam ustiga akslantirish yoki *syur’ektsiya* deyiladi.

Ya’ni f akslantirishda Y to’plamning har bir y elementi X to’plamning biror x elementining aksi (obrazi) bo’lsa f akslantirishni X to’plamni Y to’plam ustiga akslantirish yoki *syur’ektsiya* deyiladi.

---

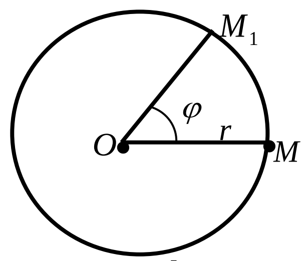
[2] Canuto, C., Tabacco, A. Mathematical Analysis I, 37-38, mazmun – mohiyatidan foydalanildi

3-misol. σ- tekislikda d to'g'ri chiziq berilgan. Tekislikning har bir M nuqtasiga uning d to'g'ri chiziqdagi ortogonal proektsiyasi M_1 nuqtani mos qo'yamiz. Natijada $f_3:\sigma\to d$ akslantirishga ega bo'lamiz. f_3 akslantirish *syurektsiya* bo'ladi, chunki d to'g'ri chiziqning har bir nuqtasi proobrazga (asliga) ega (49-chizma).

3. Agar $f:X \to Y$ akslantirish bir vaqtda ham *inektiv* ham *syurektiv* bo'lsa, u holda f akslantirishni *o'zaro bir qiymatli* akslantirish yoki *biektiv* akslantirish deyiladi.[3]

4-misol. Tekislikda O markazli, r va R radiusli ikkita konsentrik aylanalar berilgan bo'lsin. (50-chizma). r radiusli aylananing nuqtalar to'plamini X, R radiusli aylananing nuqtalar to'plami Y bo'lsin.

f_1 qoida sifatida O nuqtadan chiquvchi nurlarni olaylik. X to'plamning har bir M nuqtasi Y to'plamning OM nurida yotuvchi M_1 nuqtasiga mos keladi. Natijada $f:X \to Y$ akslantirishga ega bo'lamiz. Bu akslantirish o'zaro bir qiymatli akslantirish bo'ladi.



51-chizma

$f:X \to Y$ biektiv akslantirish bo'lsin.

2-ta'rif. f o'zaro bir qiymatli akslantirish berilgan va har qanday $x\in X$ element uchun $y = f(x)$ bo'lsin. U holda

$f^{-1}(y)=x$ qonuni bilan bajarilgan $f^{-1}:Y\to X$ akslantirish f ga *teskari akslantirish* deyiladi.

f biektiv akslantirish bo'lsa f^{-1} akslantirish mavjud ham biektiv bo'ladi.

3-ta'rif. Bo'sh bo'lmagan ixtiyoriy X to'plamni o'z-o'ziga bir qiymatli akslanritish, X to'plamni *almashtirish* deyiladi.

f akslanritish X to'plamning biror almashtirishi bo'lsin, unga teskari

f^{-1} akslantirish, ya'ni har bir $x'\in X$ elementni uning asli $x\in X$ ga o'tkazadigan akslantirish ham X to'plam almashtirishi bo'ladi. Uni f almashtirishga *teskari almashtirish* deyiladi.

Agar biror $x\in X$ element uchun $f(x)=x$ bo'lsa, ya'ni f almashtirishda x element o'z-o'ziga o'tsa, u holda bunday x elementni *qo'zgalmas* yoki *invariant* element deyiladi.

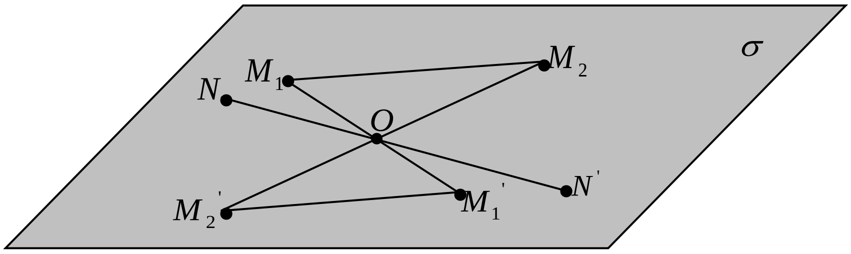
---

[3] Canuto, C., Tabacco, A. Mathematical Analysis I, 37-38, mazmun – mohiyatidan foydalanildi

4-ta'rif. Agar X to'plamning ixtiyoriy elementi uchun $f(x)=x$ bo'lsa, u holda $f{:}X \longrightarrow X$ almashtirishni *ayniy almashtirish* deyiladi va E bilan belgilanadi.

6-masala. σ tekislik nuqtalarini shu tekislik nuqtalariga almashtiraylik.

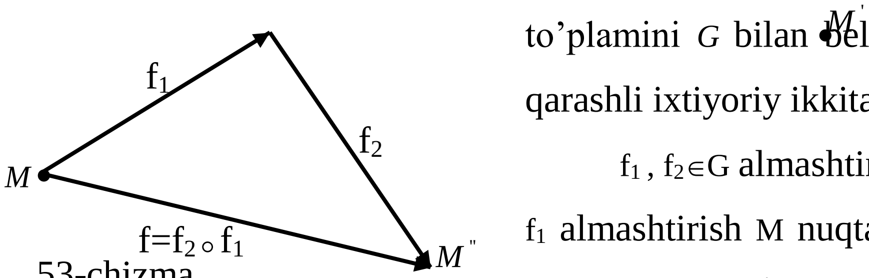
Tekislikda O nuqta berilgan bo'lsin. Tekislikning har bir M nuqtasini O nuqtaga nisbatan simmetrik M^1 nuqta topiladi. Shunday qilib $f{:}\sigma\to\sigma$ almashtirishga ega bo'lamiz. (52-chizma).



52-chizma

3. Tekislikdagi barcha almashtirishlar to'plamini G bilan belgilaylik. Bu to'plamga qarashli ixtiyoriy ikkita

$f_1, f_2 \in G$ almashtirishlarni olaylik. Bunda f_1 almashtirish M nuqtani $f_1(M)=M'$ nuqtaga, f_2 almashtirish M' nuqtani $f_2(M')=M''$ nuqtaga o'tkazsa (53-chizma), u holda f_1 va f_2 almashtirishlar M ni M'' o'tkazuvchi yangi bir $f(M)=M''$ almashtirishni hosil qiladi.



53-chizma

5-ta'rif. Agar f_1 almashtirish M nuqtani $f_1(M)=M'$ nuqtaga f_2 almashtirish M' nuqtani $f_2(M')=M''$ nuqtaga o'tkazsa, u holda M nuqtani $f(M)=M''$ nuqtaga o'tkazuvchi f almashtirishni f_1 va f_2 almashtirishlarni *kompozitsiyasi (yoki ko'paytmasi)* deyiladi. $f=f_2 \circ f_1$ yoki $f=f_2 f_1$ ko'rinishda yoziladi.(bunda avval f_1 , so'ngra f_2 bajariladi.)

Isboti. Tekisliknnig ixtiyoriy M nuqtasi d to'g'ri chiziqqa nisbatan f_1 simmetrik almashtirib M' nuqtani topamiz (54-cizma).

Tekislikda $\vec{a}$ vektor qadar f_2 parallel ko'chirish M' nuqtani M'' nuqtaga o'tkazadi. Bu akslantirishlar ko'paytmasi $f_2 f_1$ M nuqtani M'' nuqtaga o'tkazadi. Ya'ni $f(M) = M''$. Tekislikda $\vec{a}$ vektor qadar f_2 parallel ko'chirish M nuqtani N

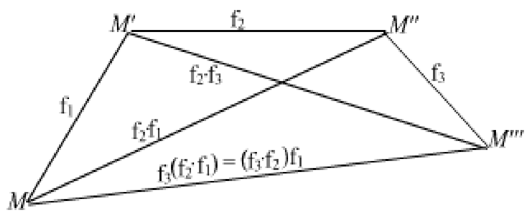
nuqtaga o’tkazadi. *d* to’g’ri chiziqqa nisbatan f_1 simmetrik almashtirish esa *N* nuqtani N' nuqtaga o’tkazadi.

Ularning ko’paytmasi ya’ni $f = f_1f_2$, almashtirish *M* nuqtani N' o’tkazadi (54-chizma). $M'' \neq N'$. Demak bu misolda $f_2f_1 \neq f_1f_2$. Umuman almashtirishlar kompozitsiyasi kommutativlik xossasiga ega emas.

Teorema. Almashtirishlarni kupaytirish assotsiativlik qonuniga bo’yso’nadi, ya’ni G to’plamning ixtiyoriy f_1, f_2, f_3 almashtirishlar uchun hamma vaqt

$$f_3 \cdot (f_2 \cdot f_1) = (f_3 \cdot f_2) \cdot f_1 \qquad (27.1)$$

tenglik o’rinli bo’ladi.(isbotini 55-chizmadan foydalanib mustaqil isbotlang)



55-chizma

3. Talabalarga gruppa tushunchasi algebradan ma’lum. Bo’sh bo’lmagan G to’plam va unda o binar munosabat aniqlangan bo’lsin.

(G,o) jufti quyidagi uchta shartni (aksiomani) qanoatlantirsa gruppa tashkil qiladi:

1. Ixtiyoriy uchta $a,b,c \in G$ elementlar uchun $a o (b o c) = (a o b) o c$ (binar munosabat assotsiativ)

2. Ixtiyoriy $a \in G$ element uchun shunday *e* element mavjudki, ular uchun:

$$a o e = a \text{ (neytral element)}$$

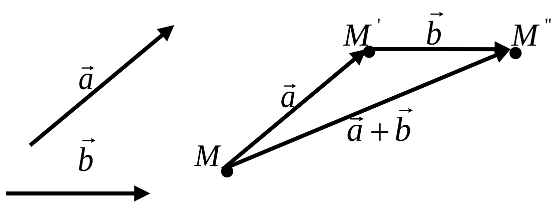
3. Ixtiyoriy $a \in G$ element uchun shunday a^1 element mavjudki, ular uchun:

$$a o a' = e.$$

Algebra kursida neytral elementning yagonaligi isbotlanadi.

Geometriyada binar munosabat o’rnida ko’paytma yoki kompozitsiya olinadi va *ab* ko’rinishda yoziladi. Neytral element sifatida *e* olinib, uni *birlik element* deb yuritiladi. Simmetrik elementni almashtirishda *teskari element* deyiladi. Masalan, *a* elementga teskari element a^{-1} kabi belgilanadi.

G almashtirishlar to’plami gruppa tashkil qilishi uchun 2,3 aksiomalarning



56-chizma

bajarilishi etarli birinchi shart akslantirishlar uchun teorema sifatida isbotlangan.

6-ta'rif. Agar G to'plamdan olingan ixtiyoriy ikki f_1,f_2 almashtirishlari uchun:

1) f_1 va f_2 almashtirishlar ko'paytmasi $f_2,f_1 \in G$ bo'lsa,

2) har bir $f \in G$ almashtirishga teskari f^{-1} almashtirish ham G ga tegishli bo'lsa, u holda G to'plamni *almashtirishlar gruppasi* deyiladi.

10-misol. Tekislikdagi barcha parallel ko'chirishlar to'plami P bo'lsin, $f_1,f_2 \in P$. f_1 almashtirish $\vec{a}$ vektor qadar parallel ko'chirish, f_2 almashtirish $\vec{b}$ vektor qadar parallel ko'chirish bo'lsin, tekislikning ixtiyoriy M nuqtasini $f_1(M)=M'$ nuqtaga,

$f_2(M') = M''$ nuqtaga o'tkazadi (56-chizma). f_1, f_2 almashtirishlar ko'paytmasi $f=f_2f_1$, $f(M)=M''$ nuqtaga o'tkazadi.

Vektorlarni qo'shish qoidasiga ko'ra $\overrightarrow{MM''}=\overrightarrow{MM'}+\overrightarrow{M'M''}=\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$ ya'ni

$\overrightarrow{MM''}=\vec{c}$

f kompozitsiya $\vec{c}$ vektor qadar parallel ko'chirishdan iborat bo'ladi.

Endi f_1 parallel ko'chirishga teskari almashtirishni bajaraylik. f_1 almashtirish $\vec{a}$ vektor qadar parallel ko'chirish bo'lgani uchun unga teskari almashtirish $-\vec{a}$ vektor qadar parallel ko'chirishdir.

Shunday qilib,

1) $\forall f_1,f_2 \subset P \Rightarrow f_2 \cdot f_1 \in P$, 2) $f_1 \in P \Rightarrow f^{-1} \in P$

Demak P to'plam gruppa tashkil qiladi.

Endi G almashtirishlar to'plami H esa G to'plamning qismiy to'plami bo'lsin.

6-ta'rif. Agar 1) H ning ixtiyoriy ikkita almashtirishlarining ko'paytmasi H ga tegishli. 2) H ning har bir almashtirishiga teskari almashtirish H ga tegishli bo'lsa, H to'plam gruppa tashkil qiladi. Bu gruppa G gruppaning *qism gruppasi* deyiladi