9- мавзу: Tekislikdagi to’g’ri chiziqlarning o’zaro vaziyatlari. To’g’ri chiziqlar dastasi va bog’lami.

Режа:

1. Tekislikdagi to’g’ri chiziqlarning o’zaro vaziyatlari.
2. To’g’ri chiziqlar dastasi va bog’lami.

Ikki to’g’ri chiziqning o’zaro joylashishi.

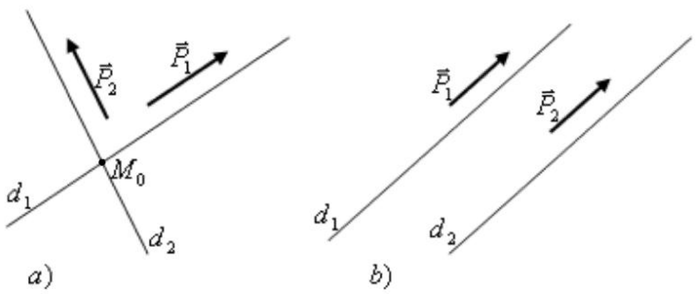
Affin koordinatalar sistemasida tekislikdagi ikkita d_1 va d_2 to’g’ri chiziqlar

$$d_1: A_1x+B_1y+C_1=0; \qquad (23.1)$$

$$d_2: A_2x+B_2y+C_2=0. \qquad (23.2)$$

tenglamalar bilan berilgan bo’lsin. U holda d_1 to’g’ri chiziqni yo’naltiruvchi vektori $P_1(-B_1,A_1)$, d_2 to’g’ri chiziqni yo’naltiruvchi vektori $P_2(-B_2,A_2)$ boladi.

d_1 va d_2 to’g’ri chiziqlarning o’zaro joylashishida quyidagi hollar yuz berishi mumkin:



43-chizma

1) $\vec{P}_1$ va $\vec{P}_2$ vektorlar kollinear emas. Bu holda d_1 va d_2 to’g’ri chiziqlar kesishadi. Aksincha, d_1 va d_2 to’g’ri chiziqlar kesishsa $\vec{P}_1$ va $\vec{P}_2$ lar kollinear bo’lmaydi. Nokollinearlik sharti:

$$\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2} \Leftrightarrow d_1 \nparallel d_2 \qquad (23.3)$$

(23.3) d_1, d_2 to’g’ri chiziqlarning kesishish sharti. Kesishish nuqtasining koordinatalarini topish uchun (23.1), (23.2) tenglamalarni sistema qilib yechish kerak.

2) $\vec{P}_1$ va $\vec{P}_2$ vektorlar kollinear. Bu holda $d_1||d_2$. Aksincha, $d_1||d_2$ bo’lsa, $\vec{P}_1$ va $\vec{P}_2$ lar kollinear bo’ladi. Kollinearlik sharti:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \Leftrightarrow d_1 \parallel d_2 \qquad (23.4)$$

(23.4) Ikkita d_1, d_2 to'g'ri chiziqlarning parallellik sharti.

3) (23.1) va (23.2) tenglamalar bitta d to'g'ri chiziqni aniqlasin. $\vec{P}_1$ va $\vec{P}_2$ lar kollinear bo'ladi:

$$A_1=\lambda A_2;$$
$$B_1=\lambda B_2. \qquad (23.5)$$

$M_0(x_0,y_0)\in d$ bo'lsa, u holda

$$A_1x_0+B_1y_0+C_1=0;$$
$$A_2x_0+B_2y_0+C_2=0. \qquad (23.6)$$

(23.5), (23.6) lardan $C_1=\lambda C_2$ tenglikka ega bo'lamiz. Shunday qilib $A_1=\lambda A_2$; $B_1=\lambda B_2$; $C_1=\lambda C_2$.

Bundan $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$ (23.7)

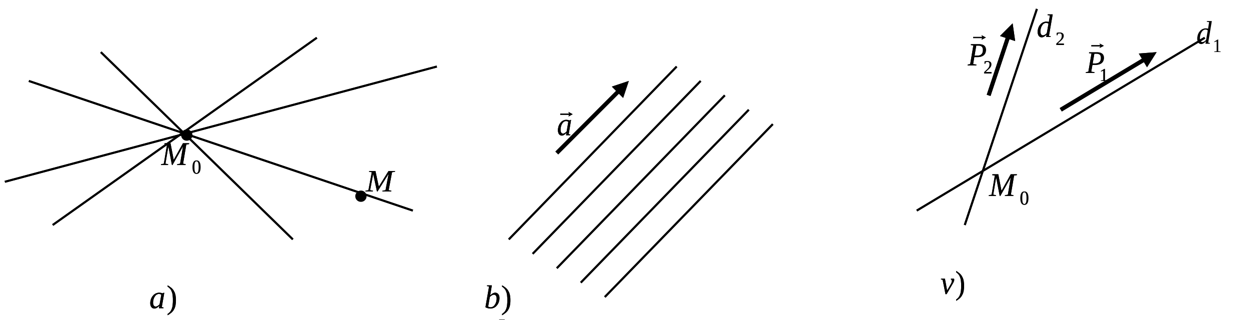
(23.7) ikkita to'g'ri chiziqning ustma-ust tushish sharti.

To'g'ri chiziqlar dastasi.

Ta'rif. Tekislikdagi berilgan M_0 nuqtadan o'tuvchi barcha to'g'ri chiziqlar to'plamini to'g'ri chiziqlar dastasi deyiladi.

M_0 nuqtani dastaning markazi deyiladi.

To'g'ri chiziqlar dastasi uning markazi M_0 nuqtaning berilishi bilan to'liq aniqlanadi. Tekislikning ixtiyoriy $M\neq M_0$ nuqtasidan dastaning faqat bitta to'g'ri chizig'i o'tadi (44.a-chizma).



44-chizma

Ta'rif. Biror $\vec{a}$ vektorga parallel bo'lgan to'g'ri chiziqlar to'plamini parallel to'g'ri chiziqlar dastasi deyiladi.

Parallel to'g'ri chiziqlar dastasi, dasta to'g'ri chiziqlariga parallel $\vec{a}$ vektorning berilishi bilan to'liq aniqlanadi.(44.b-chizma)

Dasta tenglamasi bilan tanishaylik.

$$y-y_0=k(x-x_0) \qquad (24.1)$$

tenglama (x_0,y_0) nuqtadan o'tuvchi va burchak koeffitsienti k bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamasi. k ni parametr va (x_0,y_0) nuqtani markaz deb olsak, (10.8) tenglama to'g'ri chiziqlar dastasining tenglamasi bo'ladi.

Dasta bu dastaga tegishli ikki to'g'ri chiziqning berilishi bilan ham aniqlanadi.

M_0 nuqgada kesishuvchi ikkita d_1 va d_2 to'g'ri chiziq berilgan bo'lsin.(44.v-chizma)

$$d_1: A_1x+B_1y+C_1=0;$$

$$d_2: A_2x+B_2y+C_2=0. \qquad (24.5)$$

Bir vaqtda nolga teng bo'lmagan $\alpha,\beta\in R$ sonlarni olib (24.5) dan ushbu tenglamani hosil qilaylik:

$$\alpha(A_1x+B_1y+C_1)+\beta(A_2x+B_2y+C_2)=0 \quad (24.6)$$

Bu tenglama M_0 nuqtadan o'tuvchi to'gri chiziqni aniqlaydi. (24.6) tenglama bir vaqtda nolga teng bo'lmagan har qanday α,β larda dastani ifodalaydi.

Parallel to'g'ri chiziqlar dastasini (44.b-chizma) ifodalovchi tenglamani qaraylik. Parallel to'g'ri chiziqlar dastasi $P_0(-B_0,A_0)$ vektor bilan aniqlangan bo'lsin, u holda

$$A_0x + B_0y+C = 0 \qquad (24.7)$$

tenglama dastani ifodalaydi. Bu yerda C har qanday haqiqiy qiymatni qabul qiladi.

To'g'ri chiziqlarning parallelligi va perpendikulyarligi.

Faraz qilaylik bizga xy tekisligida ikkita

$$a_1x+b_1y+c_1=0 \text{ va } a_2x+b_2y+c_2=0$$

to'g'ri chiziqlar berilgan bo'lsin.
Ularning ko'rinishini

$$y=k_1x+l_1 \text{ va } y=k_2x+l_2$$

kabi ham yozish mumkin. Bu yerda $k_i=-\dfrac{a_i}{b_i}$ va $l_i=-\dfrac{c_i}{b_i}$ $i=\overline{1,2}$

1. Tabiiyki, agar berilgan to'g'ri chiziqlar *parallel* bo'lsa ular orasidagi burchak nolga teng. Biz bundan

$$\tan\theta = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} = 0 \Rightarrow k_1 - k_2 = 0$$

yoki

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0 \qquad (*)$$

natijani olamiz.

2. Agar berilgan to'g'ri chiziqlar *perpendikulyar* bo'lsa ular orasidagi burchak $\frac{\pi}{2}$ ga teng. Biz bundan

$$\tan\theta = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} = \infty \Rightarrow 1 + k_1 k_2 = 0$$

yoki

$$a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0 \qquad (**)$$

natijani olamiz.

Misollar:

1. Parametrik ko'rinishida berilgan

$$\begin{cases} x = \alpha_1 t + a_1 \\ y = \beta_1 t + b_1 \end{cases} \text{ va } \begin{cases} x = \alpha_2 t + a_2 \\ y = \beta_2 t + b_2 \end{cases}$$

to'g'ri chiziqlarning parallellik (perpendikulyarlik) shartlarini toping.

2. Umumiy ko'rinishda berilgan

$$ax + by + c = 0$$

to'g'ri chiziq va parametrik ko'rinishida berilgan

$$\begin{cases} x = \alpha t + \beta \\ y = \gamma t + \delta \end{cases}$$

to'g'ri chiziqlarning parallellik (perpendikulyarlik) shartlarini toping. [1]

---

[1] Csaba Vincze and Laszlo Kozma "College Geometry" March 27,2014 pp.179-189, mazmun – mohiyatidan foydalanildi