2 – Мавзу. Vektorlarning berilgan bazisga ko`ra koordinatalari va ularning xossalari. Vektor fazo ta’rifi.

Режа:

1. Vektor fazo va bazis.
2. Vektorlarning berilgan bazisga ko`ra koordinatalari va ularning xossalari

Vektor fazo va bazis.

Fazodagi barcha vektorlar to’plamini V bilan belgilaymiz, unda vektorni qo’shish va ayirish, vektorni songa ko’paytirish amallari aniqlangan.

1.1 Teorema. Vektorlarni qo’shish va songa ko’paytirish quyidagi xossalarga ega.

1°. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (qo’shishga nisbatan kommutativ)

2°. $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ (qo’shishga nisbatan assotsiativ)

3°. Ixtiyoriy $\vec{a}$ uchun shunday O mavjudki ular uchun: $\vec{a}$ +0=$\vec{a}$.

4°. Har bir $\vec{a}$ uchun shunday - $\vec{a}$ mavjudki ular uchun: $\vec{a}$ + (-$\vec{a}$)=O (bunda -$\vec{a}$ ni $\vec{a}$ ga qarama-qarshi vektor deyiladi).

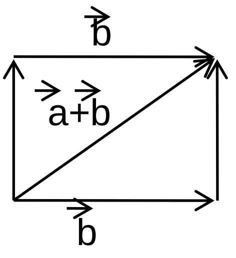
5°. Itiyoriy ikki haqiqiy son $\alpha,\ \beta$ va ixtiyoriy $\vec{a}$ uchun: $(\alpha+\beta)\vec{a}=\alpha\vec{a}+\beta\,\vec{a}$

6°. Ixtiyoriy ikki haqiqiy $\alpha,\ \beta$ son va ixtiyoriy $\vec{a}$ uchun: $\alpha(\beta\vec{a})=(\alpha\beta)\vec{a})$

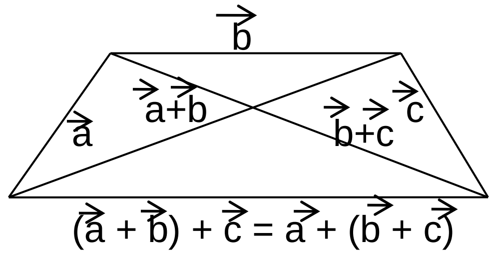
7°. Ixtiyoriy α son va ixtiyoriy $\vec{a}$, $\vec{b}$ lari uchun: $\alpha(\vec{a}+\vec{b})=\alpha\vec{a}+\alpha\,\vec{b}$

8^0. Ixtiyoriy $\vec{a}$ uchun: $1\vec{a}$ = $\vec{a}$

Isbot. 1, 2 xossalarning isbotini 7, 8 chizmalardan ko’rish mumkin.



7 - chizma



8 - chizma

3^0 va 8^0 xossalar ravshan. 4^0 ga qaraylik. Agar $\vec{a}=\overrightarrow{MN}$ bo’lsa, - $\vec{a}$ sifatida $\overrightarrow{MN}$ ni olish mumkin. Vektorlarni qo’shish ta’rifga asosan

$\vec{a}$ +(-$\vec{a}$)= $\overrightarrow{MN}$ + $\overrightarrow{NM}$ = $\overrightarrow{MM}$ = $\vec{0}$

5^0, 6^0, 7^0 xossalarni talabalar mustaqil ish sifatida o’rganadi.

V vektorlar to'plami 1.1-teoremada aytilgan sakkizta xossani qanoatlantirsa, u holda V vektorlar to'plamini vektor fazo yoki chiziqli fazo deyiladi.[1]

1. Vektor fazoning bazisi

Vektor fazoda ma'lum tartibda olingan chiziqli erkli vektorlar

$$\vec{e}_1,\ \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n \qquad (2.1)$$

berilgan bo'lsin.

Ta'rif. Vektor fazoning har bir vektori (2.1) vektorlar sistemasi orqali chiziqli ifodalansa, (4.1) sistema vektor fazo bazisi deyiladi.

Ya'ni $\forall \vec{a} \in V, \quad \vec{a} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + ... + \alpha_n \vec{e}_n$

Ta'rif. Agar bazis vektorlarning har bir vektori birlik vektor bo'lib, ularning har ikkitasi o'zaro perpendikulyar bo'lsa, bunday bazisni ortogonal bazis deyiladi.

Bazis vektorlar soni vektor fazoning o'lchovi deyiladi.

2.Vektorlarning berilgan bazisga nisbatan koordinatalari va ularning xossalari.

V_3 uch o'lchovli chiziqli fazo va uning $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ bazis vektorlari berilgan bo'lsin, u holda ta'rifga ko'ra bu fazoning har bir $a \in V_3$ vektorini

$$\vec{a} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 \qquad (2.2)$$

ko'rinishda yozish mumkin. $x, y, z \in R$

(2.2) ifodani $\vec{a}$ ning $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2, \vec{e}_3$ bazis vektorlar bo'yicha yoyilmasi deyiladi.

2.1-teorema. Vektor fazoning ixtiyoriy vektori tanlab olingan bazis vektorlarga nisbatan yagona yoyilmaga ega.

Isbot. Faraz qilaylik, $\vec{a}$ vector bazis $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2, \vec{e}_3$ vektorlar bo'yicha

$$\vec{a} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 \qquad (2.3)$$

yoyilmadan tashqari, ikkinchi bir

$$\vec{a} = x'\vec{e}_1 + y'\vec{e}_2 + z'\vec{e}_3 \qquad (2.4)$$

[1] Mathematical Literacy for Humanists, Herbert Gintis 75-76, mazmun – mohiyatidan foydalanildi

yoyilmaga ham ega bo’lsin. (2.3) tenglikdan (2.4) tenglikni hadlab ayirib quyidagiga ega bo’lamiz $(x-x')\vec{e}_1+(y-y')\vec{e}_2+(z-z')\vec{e}_3=\vec{0}$.

$\vec{e}_{1,}\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3$ vektorlar chiziqli erkli bo’lgani uchun: $x-x'=0,\ y-y'=0,\ z-z'=0$. Bundan $x=x',\ y=y',\ z=z'$ demak, yoyilma yagona.

(2.3) yoyilmadagi x, y, z haqiqiy sonlar $\vec{a}$ vektorning ($\vec{e}_{1,}\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3$) bazis vektorlarga nisbatan koordinatalari deyiladi va $\vec{a}(x,y,z)$ ko’rinishda yoziladi.

Shunday qilib $\vec{a}(x,y,z)\Leftrightarrow\vec{a}=x\ \vec{e}_1+y\ \vec{e}_2+z\ \vec{e}_3$

Natija. Nol vektorning har qanday bazisga nisbatan koordinatalari nolga teng: $\vec{0}$ (0, 0, 0).

V_3 vektor fazoda $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar o’zining bazis ($\vec{e}_{1,}\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3$) vektorlariga nisbatan ushbu koordinatalarga ega bo’lsin:

$$\vec{a}(x_1,y_1,z_1)\Leftrightarrow\vec{a}=x_1\vec{e}_1+y_1\vec{e}_2+z_1\vec{e}_3$$

$$\vec{b}(x_2,y_2,z_2)\Leftrightarrow\vec{b}=x_2\vec{e}_1+y_2\vec{e}_2+z_2\vec{e}_3$$

1. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarni qo’shamiz (ayiramiz).

$$\vec{a}\pm\vec{b}=(x_1\vec{e}_1+y_1\vec{e}_2+z_1\vec{e}_3)\pm(x_2\vec{e}_1+y_2\vec{e}_2+z_2\vec{e}_3)$$

Bu tenglikdan vektorlarni qo’shish (ayirish) xossalariga ko’ra

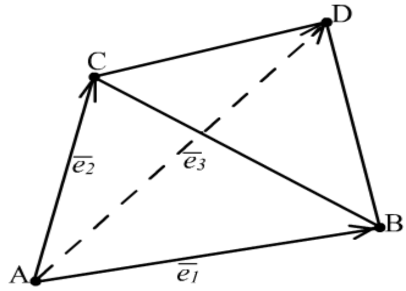
$$\vec{a}\pm\vec{b}=(x_1\pm x_2)\vec{e}_1+(y_1\pm y_2)\vec{e}_2+(z_1\pm z_2)\vec{e}_3.$$

Bundan $(\vec{a}\pm\vec{b})[(x_1\pm x_2),(y_1\pm y_2),(z_1\pm z_2)]$.

Demak, ikki vektor yig’indisining (ayirmasining) koordinatalari qo’shiluvchi (ayriluvchi) vektorlar mos koordinatalarning yig’indisidan (ayirmasidan) iborat.

2. $\vec{a}$ ning λ songa ko’paytmasining, ya’ni $\vec{p}=\lambda\vec{a}$ vektorning koordinatalari

$\vec{p}=\lambda\vec{a}(\lambda x,\lambda y,\lambda z)$ bo’ladi.



1-chizma