1-ma'ruza: Vektorlar. Vektorlar ustida chiziqli amallar. Vektorlarning chiziqli bog`liqligi.

Darsning rejasi va maqsadi

- 1. Vektor tushunchasi.
- 2. Vektorlar ustidagi chiziqli amallar.
- 3. Vektorlarning chiziqli bog'liqligi.
- 4. Vektor fazo va bazis.
- 5. Vektorlarning skalyar ko'paytmasi.

- **Maqsadi :** Vektor tushunchasi, vektorlar ustidagi chiziqli amallar, vektorlarning chiziqli bog'liqligi, vektor fazo va bazis, vektorlarning skalyar ko'paytmasi haqida bilimlar berish, tasavvurlar hosil qilish.

Algebra va tekislikdagi geometriyaning integratsiyasi borasidagi buyuk kashfiyotlardan biri frantsuz faylasufi Rene Dekart nomi bilan bog'liq. Dekartning ta'kidlashicha tekislikdagi Yevklid geometriyasini olib (x,u) uni tartiblangan haqiqiy sonlar juftligi bilan bog'lash

U aylana $x^2 + y^2 = r^2$ ko'rinishidagi kvadrat tenglamaning yechimi ekanligini aniqladi. Bu yerda r>0 aylana radiusi. Analitik geometriya $\mathbf{R}^2$. ikki o'lchamli fazo tekisligi bilan paydo bo'ldi. Lekin jarayon bu yerda tugamadi va balki nuqtani $\mathbf{R}^n$ fazoni yuzaga kelishiga sabab bo'luvchi tartiblangan n ta haqiqiy sonlar to'plami $(x_1, \ldots, x_n)$ bilan mos qo'yilishiga olib keldi. [1]

Evklid aksiomalarining biriga ko'ra har bir nuqtalar juftligi bir qiymatli tarzda to'g'ri chiziqni aniqlaydi. Algebraik nuqtai nazaridan $\mathbf{v}_1 = (x_1, y_1)$ va $\mathbf{v}_2 = (x_2, y_2)$ nuqtalarga ko'ra quyidagi tenglamalar juftligini yechish bilan to'g'ri chiziq tenglamasining koeffitsentlarini topishimiz mumkin.

$$ax_i + by_i = c \qquad i = 1,2$$

a, b va s lar orasida $x_1y_2 \neq x_2y_1$ munosabat bajarilganda quyidagi bog'lanishlar mavjud.

$$a = c\frac{y_2 - y_1}{x_1y_2 - x_2y_1}, \qquad b = c\frac{x_2 - x_1}{x_1y_2 - x_2y_1} \qquad (1)$$

[1] Mathematical Literacy for Humanists, Herbert Gintis, 73-80, mazmun – mohiyatidan foydalanildi

Bu yerda s nol bo’lmagan haqiqiy son. Agar $x_1 y_2 = x_2 y_1$ lekin $x_1 \neq x_2,$ u holda s=0 va $a/b = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$ shu tarzda to’g’ri chiziq koordinatalar boshidan o’tib $a/b.$ qiyalikga ega. Nihoyat, agar $x_1 = x_2,$ bo’lsa bu to’g’ri chiziq gorizantal to’g’ri chiziqdir.[2]

r haqiqiy son va $\mathbf{v} = (x, y)$ nuqta koordinatalari ko’paytmasini $r\mathbf{v} = r(x, y) = (rx, ry)$ ko’rinishida aniqlaymiz, ikki nuqta koordinatalari yig’indisini quyidagicha aniqlaymiz $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$, u holda V_1 , V_2 lar bilan aniqlangan to’g’ri chiziq nuqtalar to’plami quyidagicha aniqlanadi.

$$\{\mathbf{v}^r = r\mathbf{v}_1 + (1 - r)\mathbf{v}_2 | r \in \mathbf{R}\}. \qquad (2)$$

Buni ko’rsatish uchun har uchala holatni qarab chiqishimiz zarur, agar biz to’g’ri chiziq haqiqatda V_1 , V_2 nuqtalar orasida yotishiga ishonch hosil qilsak, biz xususiy hollarga qaytmaymiz. Faraz qilaylik $x_1 y_2 \neq x_2 y_1$ bo’lsin. U holda (1) o’rinli ekanligidan ixtiyoriy nuqtani $(x, y) = r\mathbf{v}_1 + (1-r)\mathbf{v}_2$ ko’rinishida ifodalasak siz aslida $ax_i + by_i = c \quad i = 1, 2$ ekanligini tekshirishingiz mumkin bu yerda a, b lar (1) da berilgan va s ni soddlashtirish bilan topamiz. Men o’quvchiga $x_1 y_2 = x_2 y_1$ lekin $x_1 \neq x_2,$ va $x_1 = x_2.$ bo’lgan holatlarni tekshirishni qoldiraman. V_1 , V_2 nuqtalar orasidagi kesma doim $\{r\mathbf{v}_1 + (1 - r)\mathbf{v}_2 | r \in [0, 1]\}.$ nuqtalar to’plami ko’rinishida ishodalanishi mumkin. Haqiqatda ham $r\mathbf{v}_1 + (1 - r)\mathbf{v}_2$ nuqta V_1 , V_2 nuqtalar orasidagi kesmani $r : 1 - r$ nisbatda bo’ladi. Misol uchun, $\mathbf{v}^0 = \mathbf{v}_2, \mathbf{v}^1 = \mathbf{v}_1.$ $\mathbf{v}^{1/2}$ - bu to’g’ri chiziq segmentining o’rta nuqtasi.

Bu tasdiqning eng sodda isboti nuqtalardan birini eng qulay vaziyatda joylashtiramiz. Natija nuqtaning qaerda joylashganligiga emas, balki ularning bir-biriga nisbatan qanday joylashganligiga bog’liq bo’ladi.

Yuqorida aytilgan vaziyatda v_2 ning koordinatalar boshiga ko’chirilgan vaziyatini olamiz, u holda $\mathbf{v}_2 = \mathbf{0} = (0, 0)$ bo’lib buni nolь vektor deb ataladi. Bundan $\mathbf{v}^r = r\mathbf{v}_1$ ning koordinatalar boshidan va $\mathbf{v}_1$ nuqtadan o’tuvchi $\mathbf{v}^r$ to’g’ri chiziq ekanligi kelib chiqadi. SHuning uchun bu to’g’ri chiziqlar bitta va faqat bitta. $\mathbf{v}^r$ to’g’ri chiziq 0 va $\mathbf{v}_1$ nuqtalar orasidagi kesmani $r : 1 - r$ nisbatda bo’lishini isbotlashimiz uchun nuqta va nol vektor orasidagi masofani aniqlashimiz kerak. Ma’lumki, $\mathbf{0}$ va $\mathbf{v} = (x, y)$ orasidagi masofa $|\mathbf{v}| = \sqrt{x^2 + y^2}$ bilan

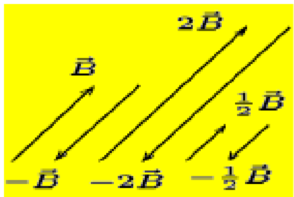
[2] Mathematical Literacy for Humanists, Herbert Gintis, 73-80. mazmun – mohiyatidan foydalanildi

aniqlanadi. Bundan agar $r \geq 0$ bo'lsa, u holda $r|\mathbf{v}| = |r\mathbf{v}|$ bo'ladi. Demak, $\mathbf{v}^r$ nuqta $\mathbf{0}$ va $\mathbf{v}_1$ kesmani $r : 1 - r$ nisbatda bo'lar ekan.

Ikkita har xil $\mathbf{v}_2$ va $\mathbf{v}_1$ nuqtalar orasidagi masofa $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ formula orqali topiladi.

Endi vector tushunchasini va uning hossalarini ko'rib chiqamiz.

1 - ta'rif. Agar berilgan kesmaning uchlari tartiblangan bo'lsa, u holda bunday kesma yo'nalgan kesma deyiladi. Yo'nalgan kesmaning birinchi uchi uning boshi, ikkinchi uchi esa oxiri deyiladi.



1 – chizma

Yo'nalgan kesmani $\vec{B}$ bilan belgilaymiz (1-chizma).

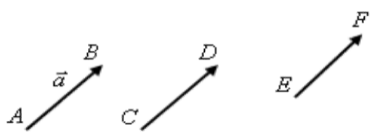
Yo'nalgan $\vec{B}$ kesmaning uzunligi deb, $\vec{B}$ kesma uzunligiga aytiladi va $|\vec{B}|$ yoki B bilan belgilanadi.

2 - ta'rif. Agar $\vec{A}$ va $\vec{B}$ nurlar bir xil (qarama-qarshi) yo'nalgan bo'lsa, $\vec{A}$ va $\vec{B}$ yo'nalgan kesmalar bir xil (qarama-qarshi) yo'nalishli deyiladi.

3 - ta'rif. Uzunliklari teng yo'nalishi bir xil bo'lgan barcha yo'nalgan kesmalar to'plamini ozod vektor yoki qisqacha vektor deb ataladi.(2-chizma) [3]

Vektor ustiga "$\rightarrow$" belgi qo'yilgan kichik lotin harflari $\vec{a},\vec{в},\vec{c},...$ bilan yoki qo'yiq qilib yozilgan kichik lotin harflari $a, в, c, ...$ bilan belgilanadi.

Vektor so'zi lotincha vector – so'zidan olingan bo'lib, tashuvchi, olib yuruvchi degan ma'noni bildiradi.



2-

Ta'rifdan vektor, uzunliklari teng bir xil yo'nalgan

---

[3] Introduction to Calculus Volume II. pp 1 mazmun – mohiyatidan foydalanildi

kesmalar to’plamidan iborat, ekanligi ravshan. Bu to’plamga tegishli har bir yo’nalgan

kesma to’plamni to’liq aniqlaydi. Shuning uchun

agar $\overline{AB} \in \vec{a}$ bo’lsa, $\vec{a}$ vektorni $\overline{AB} = \vec{a}$ ko’rinishda yozishimiz mumkin.

A nuqta $\overline{AB}$ vektorning boshi, B nuqta esa $\overline{AB}$ vektorning oxiri deyiladi. Yo’nalgan $\overline{AB}$ kesmaning uzunligi $\overline{AB}$ vektor uzunligi, yoki moduli deyiladi va $|\overline{AB}|$ ko’rinishida belgilanadi.

4 - ta’rif. Uzunligi birga teng bo’lgan vektor birlik vektor yoki ort deyiladi.

5 - ta’rif. Boshi bilan oxiri ustma – ust tushgan vektor nol vektor deyiladi.

Nol vector $\vec{0}$ ko’rinishida yoki $\overline{AA}$, yoki $\overline{BB}$ ko’rinishida belgilanadi. Nol vektor yo’nalishi (aniq emas) aniqlanmagan.

6 - ta’rif. Agar $\overline{AB} \in \vec{a}$, $\overline{CD} \in \vec{b}$ yo’nalgan kesmalar bir xil (qarama-qarshi) yo’nalishli bo’lsa, $\overline{AB} = \vec{a}$ va $\overline{CD} = \vec{b}$ lar bir xil (qarama-qarshi) yo’nalishli deb aytiladi.

Agar $\overline{AB}$ va $\overline{CD}$ lar bir xil yo’nalishli bo’lsa $\overline{AB} \uparrow\uparrow \overline{CD}$ ko’rinishida, qarama – qarshi yo’nalishda bo’lsa $\overline{AB} \uparrow\downarrow \overline{CD}$ ko’rinishda belgilaymiz.

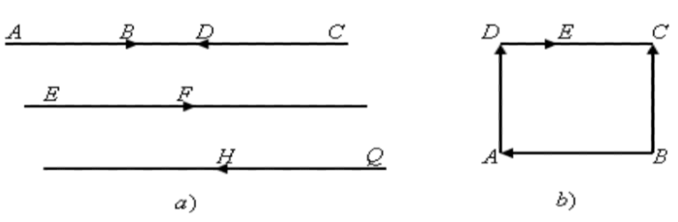
7 - ta’rif. Agar ikkita $\overline{AB}$ va $\overline{CD}$ vektorlar bir to’g’ri chiziqda yoki parallel to’g’ri chiziqlarda yotsa, u holda bu vektorlarni kollinear vektorlar deyiladi.

8 – ta’rif. Agar quyidagi shartlar o’rinli bo’lsa:

1) $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning modullari teng ;

2) $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning yo’nalishlari bir xil bo’lsa, $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarni teng vektorlar deyiladi va $\vec{a} = \vec{b}$ ko’rinishida yoziladi.

1. Agar uchta vektor bir tekislikda yoki parallel



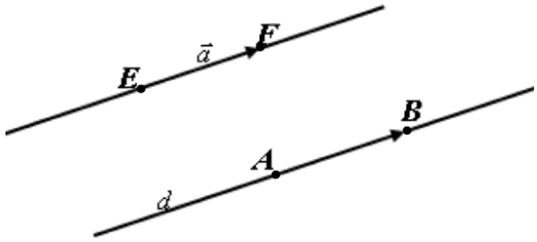
3-chizma

tekisliklarda yotsa, u holda bunday vektorlarni komplanar vektorlar deyiladi.

3-chizmada parallel to'g'ri chiziqlarda va $ABCD$ kvadrat tomonlarida yotuvchi vektorlar ko'rsatilgan: 1) bularning qaysi juftlari bir xil yo'nalishga va qaysi juftlari qarama-qarshi yo'nalishga ega, 2) qaysi juftlari kollinear bo'ladi, 3) qaysi juftlari teng, qaysi juftlari teng emas.

Vektorlar ustidagi chiziqli amallar

Tekislikda $\vec{a} = \overrightarrow{EF}$ va A nuqta berilgan bo'lsin. A nuqtadan EF to'g'ri chiziqqa parallel d to'g'ri chiziq o'tkazamiz. (4-chizma)



4-chizma

A nuqtadan ko'rsatilgan yo'nalishda $\vec{a}$ vektor uzunligini o'lchab qo'yib B nuqtani topamiz. $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB} = \vec{a}$. Shunday qilib $\vec{a}$ ni A nuqtadan qo'ydik, ya'ni ko'chirdik.

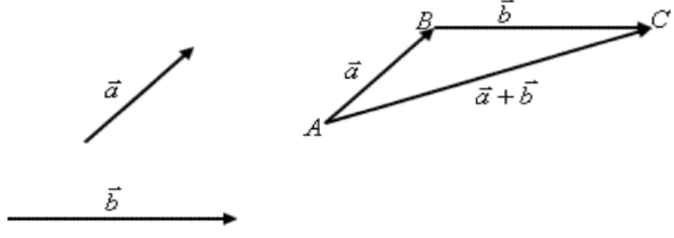
9-Ta'rif. Ikkita $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning yig'indisi deb, ixtiyoriy A nuqtadan $\vec{a}$ vektorni qo'yib, uning oxiri B nuqtaga $\vec{b}$ vektorni qo'yganda boshi $\vec{a}$ vektorning boshi A nuqtada oxiri $\vec{b}$ vektorning oxiri C nuqtada bo'lgan $\overrightarrow{AC}$ vektorga aytiladi.

$\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning yig'indisi $\vec{a} + \vec{b}$ kabi belgilanadi. (5- chizma)

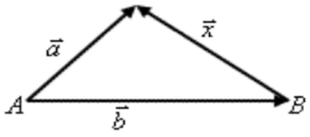
Vektorlarni qo'shish ta'rifidan istalgan uchta A, B va C nuqtalar uchun

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Bu tenglikni vektorlarni qo'shishning uchburchak qoidasi deyiladi.



5-chizma



6-chizma

10 - Ta’rif. $\vec{a}$, $\vec{b}$ vektorlarning ayirmasi deb, shunday $\vec{x}$ vektorga aytiladiki, ular uchun $\vec{b}+\vec{x}=\vec{a}$ tenglik o’rinli bo’ladi. U holda $\vec{x}=\vec{a}-\vec{b}$.(6- chizma)

Ikkita vektorning ayirmasi hamma vaqt mavjud va bir qiymatli aniqlanishini isbotlash mumkin.

11 - Ta’rif. $\vec{a}\neq\vec{0}$ vektorning $\alpha\in R$ songa ko’paytmasi deb quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi $\vec{p}$ ga aytiladi va $\vec{p}$ = $\alpha\cdot\vec{a}$ ko’rinishda yoziladi.

1) $|\vec{p}|=|\alpha|\cdot|\vec{a}|$;

2) $\vec{p}$ vektor $\vec{a}$ ga kollinear.

3) Agar α >0 bo’lsa $\vec{p}$ va $\vec{a}$ vektorlar bir xil yo’nalgan, agar α <0 bo’lsa, $\vec{p}$ va $\vec{a}$ vektorlar qarama- qarshi yo’nalgan bo’ladi.

1.1-teorema. Vektorlarni qo’shish va songa ko’paytirish quyidagi xossalarga ega.

1°. Agar $\vec{A}$ va $\vec{B}$ vektorlar to'plamiga tegishli bo’lsa u holda ularning eg’indisi ham shu to’plamga tegishli (yopiqlik)

2°. $\left(\vec{A}+\vec{B}\right)+\vec{C}=\vec{A}+\left(\vec{B}+\vec{C}\right)$ (qo’shishga nisbatan assotsiativ)

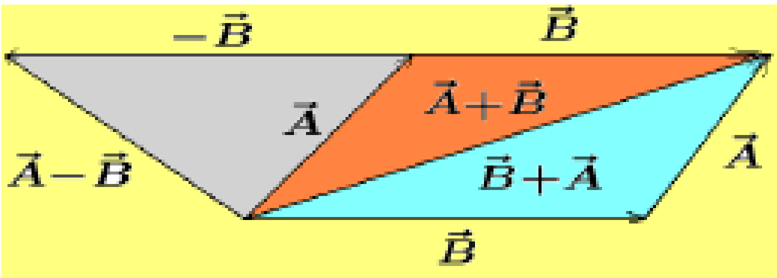
3°. Ixtiyoriy $\vec{A}$ vector uchun shunday $\vec{0}$ vector mavjudki ular uchun: $\vec{A}+\vec{0}=\vec{A}$ munosabat o’rinli hamda $\vec{0}$ vector qo’shishga nisbatan neytral element.

4°. Har bir $\vec{A}$ vector uchun shunday $\vec{E}$ vector mavjudki ular uchun:

$\vec{A}+\vec{E}=\vec{0}$ (bunda $\vec{E}$ ni $\vec{A}$ ga qarama-qarshi vektor deyiladi va $\vec{E}=-\vec{A}$).

5°. $\vec{A}+\vec{B}=\vec{B}+\vec{A}$ (qo’shishga nisbatan kommutativ)

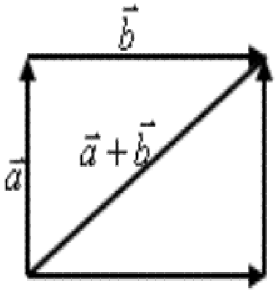
6°. Ixtiyoriy m haqiqiy son va ixtiyoriy $\vec{A}$, $\vec{B}$ vectorlar uchun: $m\left(\vec{A}+\vec{B}\right)=m\vec{A}+m\vec{B}$ [4]

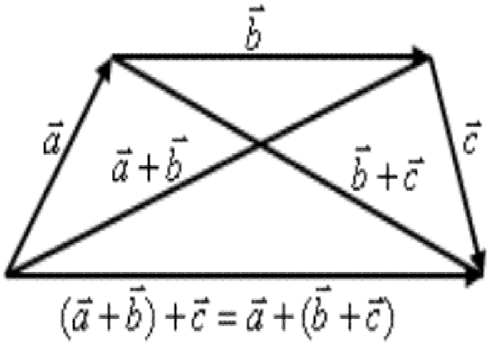


1°.Itiyoriy ikki haqiqiy α, β son va ixtiyoriy $\vec{a}$ vector uchun: $(\alpha+\beta)\vec{a}=\alpha\vec{a}+\beta\,\vec{a}$

2°. Ixtiyoriy ikki haqiqiy α, β son va ixtiyoriy $\vec{a}$ vector uchun: $(\alpha\cdot\beta)\cdot\vec{a}=\alpha\cdot(\beta\cdot\vec{a})$

3°. Ixtiyoriy $\vec{a}$ vector uchun: $1\cdot\vec{a}=\vec{a}\cdot 1=\vec{a}$





8- chizma

7-chizma

Isbot. 1, 2 xossalarning isbotini 7, 8 chizmalardan ko’rish mumkin.

[4] Introduction to Calculus Volume II. pp 3-4 mazmun – mohiyatidan foydalanildi

3^0 va 8^0 xossalar ravshan. 4^0 ga qaraylik. Agar $\vec{a} = \overrightarrow{MN}$ bo'lsa, $-\vec{a}$ sifatida $\overrightarrow{NM}$ ni olish mumkin. Vektorlarni qo'shish ta'rifiga asosan

$\vec{a} + (-\vec{a}) = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{MM} = \vec{0}$

5^0, 6^0, 7^0 xossalarni talabalar mustaqil ish sifatida o'rganadi.

Vektorlarning chiziqli bog'liqligi.

Ta'rif. Ixtiyoriy $\vec{A}_1, \vec{A}_2, ..., \vec{A}_n$, vektorlar sistemasi va $c_1, c_2, ..., c_n$, haqiqiy sonlar berilgan bo'lsin.

$$\vec{A} = c_1\vec{A}_1 + c_2\vec{A}_2 + ... + c_n\vec{A}_n,$$

vektorni berilgan $\vec{A}$ vektorlarning chiziqli kombinatsiyasi deyiladi. Bunda $\vec{A}$ vektor $c_1, c_2, ..., c_n$, vektorlar sistemasi orqali chiziqli ifodalangan deyiladi, $c_1, c_2, ..., c_n$, sonlar chiziqli kombinatsiya koeffitsentlari deyiladi.

12-ta'rif. Ixtiyoriy $\vec{A}$ va $\vec{B}$ vektorlarning, k_1, k_2 haqiqiy sonlar bilan berilgan chiziqli kombinatsiyasi

$$k_1\vec{A} + k_2\vec{B} = \vec{0} \qquad (3.3)$$

koeffitsentlarning kamida bittasi noldan farqli bo'lganda (3.3) bajarilsa , u holda $\vec{A}$ va $\vec{B}$ vektorlar sistemasi chiziqli bog'liq deyiladi.

Agar (3.3) tenglik k_1, k_2 sonlarning hammasi nolga teng bo'lgandagina o'rinli bo'lsa, $\vec{A}$ va $\vec{B}$ vektorlar sistemasi chiziqli erkli deyiladi.[5]

1.2-teorema. Agar (3.1) vektorlar sistemasining biror vektori nol vektor bo'lsa, u holda bu vektorlar sistemasi chiziqli bog'liq bo'ladi.

Isbot. Faraz qilaylik $\vec{a}_k = \vec{0}$ bo'lsin, u holda

$\alpha_k \neq 0, \alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_{k+1} = ... = \alpha_n = 0$, sonlar uchun $\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + ... + \alpha_n\vec{a}_n = \vec{0}$

[5] Introduction to Calculus Volume II. pp 3-4. mazmun – mohiyatidan foydalanildi

munosabat o’rinli bo’ladi. Demak, ta’rifga asosan (3.1) vektorlar sistemasi chiziqli bog’liq.

Quyidagi teoremalarni talabalar o’zlari isbotlasin.

1.2-teorema. Agar (3.1) vektorlar sistemasi chiziqli bog’liq bo’lsa, sistemaning kamida bitta vektori uning qolgan vektorlari orqali chiziqli ifodalanadi.

1.3-teorema. Ikkita vektor chiziqli bog’liq bo’lishi uchun ularning kollinear bo’lishi zarur va etarli.

1.4-teorema. Uchta vektor chiziqli bog’liq bo’lishi uchun ularning komplanar bo’lishi zarur va etarli.