Kompleks sonlar maydoni. Kompleks son qo'shmasi va moduli, ularning xossalari

Reja:

- Kompleks kengaytma.
- Kompleks sonlar maydoni.
- Qo'shma kompleks sonlar.
- Kompleks son moduli.

Ma'lumki, xaqiqiy sonlar maydonida $x^2+1=0$ tenglama echimga ega emas. Bu tenglama echimga ega bo'ladigan, haqiqiy sonlar maydonining eng kichik kengaytmasi bo'lgan maydonni quramiz.

$\sqrt{-1}$ ni i orqali belgilab olamiz.

$C=\{b+bi/a,b\in\Re\}$ - to'plamni qaraylik. C - da $(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i;$ $(a+bi)\cdot c+di(=(ac-bd)+(ad+bc)i;$ $-(a+bi)=(-a)+(-b)i$ tengliklar orqali qo'shish, ko'paytirish, qarama-qarshisini olish amallarini aniqlaymiz.

C to'plam yuqorida aniqlangan amallarga nisbatan maydon hosil qilishini ko'rsatamiz. Haqiqatda, qo'shish, ko'paytirish amallarining kommutativligi, assosiativligi, ko'paytirishning qo'shishga nisbatan distributivligi bevosita tekshiriladi. $0+0i$ element C da qo'shishga nisbatan neytral element bo'lib, uni 0 orqali belgilaymiz. $1+o_i$ esa birlik elementdir. Ixtiyoriy $a+b_i\neq 0$ element uchun teskari element $(a+b_i)^{-1}\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}i$ formula bilan aniqlanadi. Haqiqatdan ham, $a+bi\neq 0$ bo’lsa, $a^2+b^2\neq 0$ bo’lib, $\frac{a}{a^2+b^2}+\frac{b}{a^2+b^2}i$ element mavjud va

$$(a+bi)(\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}i)=(\frac{a^2}{a^2+b^2}-\frac{b^2}{a^2+b^2})+(\frac{-ab}{a^2+b^2}-\frac{ba}{a^2+b^2})i=1+oi=1.$$

Shunday qilib, $(C,+,-,\cdot 0,1)$ algebra maydon ekan.

Bu maydonni kompleks sonlar maydoni deb ataymiz.

36.1.-ta’rif. Kompleks sonlar maydonining har qanday maydonostisi sonli maydon deyiladi. Kompleks sonlar maydonining har qanday xalqaostisi sonli maydondir.

36.2.-misol. $Z[i]=\{a+bi/\forall a,b\in Z\}$ to’plam sonli xalqadir.

36.3.-ta’rif. $Z=a+bi$ kompleks son uchun $Z=a-bi$ - qo’shma kompleks son deyiladi.

36.4.-teorema. Har qanday $z_1,\ z_2$ - kompleks sonlar uchun quyidagi hossalar o’rinli:

1^0. $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$.

2^0. $(\overline{-z_1})=-\overline{z_1}$.

3^0. $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$.

4^0. $\overline{(\overline{z})}=z$.

5^0. $z_2 \neq 0, \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.

6^0. $z = \overline{z}$ bo'lishi uchun $z \in R$ bo'lishi zarur va etarli.

7^0. Agar $z = a + bi$ bo'lsa, u xolda $z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2$

Isbot. Bu hossalar bevosita tekshirib chiqish orqali isbtlanadi.

3°-hossaning isbotini keltiramiz. $Z_1 = a_1 + b_1 i$, $Z_2 = a_2 + b_2 i$ bo'lsin. U holda $z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1 \cdot i)(a_2 + b_2 \cdot i) = (a_1a_2 + b_1b_2) + (a_1b_2 + b_1a_2)i = (a_1a_2 - b_1b_2) -$

$- (a_1b_2 + b_1a_2)i = (a_1a_2 + b_1b_2) + (-a_1b_2 + b_1a_2)i = (a_1 - b_1 i)(a_2 - b_2 i) = \overline{Z}_1 \cdot \overline{Z}_2$.

36.5.-ta'rif. $\sqrt{a^2 + b^2}$ son $a + bi (a, b \in \Re)$ <u>kompleks sonining moduli</u> deyiladi. Kompleks sonning moduli $|Z|$ orqali belgilanadi.

36.6.-teorema. Har qanday Z_1, Z_2 kompleks sonlar uchun quyidagi munosabatlar o'rinli:

1^0. $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$.

2^0. $|z| = 0$ faqat va faqat shu xoldaki, agar z = 0 bo'lsa.

3^0. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

4^0. $|z^{-1}| = |z|^{-1} (z \neq 0)$.

5^0. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

6^0. $|z_1| - |z_2| \leq |z_1 + z_2|$.

7^0. $\left||z_1|-|z_2|\right| \le |z_1+z_2|$.

Isbot: $z_1 = a_1 + b_1 i \cdot z_2 = a_1 + b_2 \cdot i,\ (a_1, a_3 b_1, b_2 \in \Re)$ bo'lsin, u holda:

1°. $|Z_1|^2 = (\sqrt{a_1^2+b_1^2} = a_1^2 + b_1^2 = (a_1+b_1 i))(a_1 - b_1 i) = Z_1 \cdot \overline{Z}_1$

2°. $Z_1 = 0$ bo'lsa, $a_1 = 0,\ b_1 = 0$ bo'lib, $(\sqrt{a_1^2+b_1^2} = |Z_1| = 0_1$ aksincha $\sqrt{a_1^2+b_1^2} = 0$ bo'lsa, bo'lsa $a_1 = 0$ va $b_1 = 0$.

3°. $|Z_1 \cdot Z_2| = |(a_1+b_1 i)\cdot(a_2+b_2 i)| = |(a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + b_1a_2)i| =$

$= \sqrt{(a_1a_2-b_1b_2)^2 + (a_1b_1 + b_1a_2)^2} = \sqrt{(a_1^2+b_1^2)(a_2^2+b_2^2)} = \sqrt{a_1^2+b_1^2} - \sqrt{a_2^2+b_2^2} = |Z_1|\cdot|Z_2|.$

4°. $Z_1 \ne 0$ bo'lsa, $1 = |Z_1 \cdot Z_2^{-1}| = |Z_1|\cdot|Z_1^{-1}|$ u holda $|Z_1^{-1}| = 1/|Z|$.

5°. $\forall Z = a + bi (a, b \in \Re)$ uchun $|z+1|^2 \le (|Z|+1)^2$. Demak, $|z+1| \le |z| + 1 - y$ holda $|z_1 + z_1| = |z_2| \cdot \left|z_1/z_2 + 1\right| \le |z_2| \cdot (\left|z_1/z_2\right| + 1) = |z_2| \cdot \left|\frac{z_1}{z_2}\right| + |z_2| = |z_1| + |z_2|$

6°. 5°. tengsizlikda $U = z_1 + z_2$ belgilashni kiritsak, $|U| \le |U - Z_2| + |Z_2|$ yoki $|U - Z_2| \ge |U| - |Z_2|$ hosil bo'ladi.

7°. - ning isboti 6° -dan bevosita kelib chiqadi.

Takrorlash uchun savollar:

1. Haqiqiy sonlar maydonining kengaytmasini quring.
2. Kompleks son qanday hosil qilingan?
3. Kompleks sonlar ustida arifmetik amallarni aniqlang.
4. Kompleks sonlar to'plami maydon tashkil etishini isbotlang.
5. Kompleks sonning qo'shmasi xossalarini isbotlang.
6. Kompleks son moduliga ta'rif Bering.
7. Kompleks son moduli xossalarini isbotlang.

Foydalaniladigan adabiyotlar ro'yxati

Asosiy adabiyotlar:

1. Malik D.S., Mordeson J.N., Sen M.K. Fundamental of abstract algebra. WCB McGrew-Hill, 1997.
2. Martyn R. Dixon, Leonid A. Kurdachenko, Igor Ya. Subbotin, "ALGEBRA AND NUMBER THEORY" 2010.
3. Кострикин А.М. Введение в алгебру.- М.- «Мир».- 1977.
4. Под ред. Кострикина, Сборник задач по алгебре, М.Наука, 1986.
5. Хожиев Ж.Х. Файнлейб А.С. Алгебра ва сонлар назарияси курси, Тошкент, «Ўзбекистон», 2001 й.
6. Курош А.Г. Олий алгебра курси, Тошкент, «Ўқитувчи». 1975й.
7. Гельфанд И.М. Чизиқли алгебрадан лекциялар. «Олий ва ўрта мактаб». 1964.
8. Р.Н.Назаров, Б.Т. Тошпўлатов, А.Д.Дусумбетов, Алгебра ва сонлар назарияси 1 қисм, 2 қисм, 1993й., 1995й.
9. A.Yunusov , D.Yunusova , Algebra va sonlar nazariyasi. Modul texnologiyasi asosida tuzilgan musol va mashqlar to'plami. O'quv qo'llanma. 2009.

Qo’shimcha adabiyotlar:

1. Фаддеев Д.К. Лекции по алгебре, М., “Наука”1984г.

2. Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Сборник задач по высшей алгебре, М.: Наука, 1977 г.

3. Поскуряков И.Л. Сборник задач по линейной алгебре. «Наука», 1978г.

4. Ламбек И. Кольца и модули.- М.- «Мир».- 1971.

5. Херстейн. Некоммутативные кольца. М.- «Мир».- 1967.

6. Vilnis Detlovs, Karlis Podnieks, Introduction to Mathematical Logic. University of Latvia. Version released: August 25, 2014.

7. А.Юнусов , Д.Юнусова, М.Маматқулова, Г.Артикова, Модул технологияси асосида тайёрланган мустақил ишлар тўплами. 1−3−қисмлар, 2010.

8. Скорняков Л.Ф. Элементи обшей алгебри. М., 1983 г.

9. Петрова В.Т. лексия по алгебре и геометрии. Ч.1,2. Москва,1999г.

10. Yunusov A.S. Matematik mantiq va algoritmlar nazariyasi elementlari. T., “Yangi asr avlodi”. 2006.

11. Yunusov A., Yunusova D. Sonli sistemalar. T., «Moliya−iqtisod», 2008.

12. Мазуров В.Д. и др. Краткий конспект курса висшей алгебри.

Elektron ta’lim resurslari

1. www.Ziyo.Net
2. http://vilenin.narod.ru/Mm/Books/

3. http://www.allmath.ru/
4. http://www.pedagog.uz/
5. http://www.ziyonet.uz/
6. http://window.edu.ru/window/
7. http://lib.mexmat.ru;
8. http://www.mcce.ru,
9. http://lib.mexmat.ru
10. http://techlibrary.ru;